

VŠB – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Bakalářská práce

2009

Marcel Fajkus

VŠB – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra telekomunikační techniky

Modulace signálu a jejich vliv na spektrum signálu

Affect of modulation to the spectrum of the
modulated signal

*„Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně.
Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.“*

V Ostravě

Podpis

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat vedoucímu své bakalářské práce Ing. Janu Skapovi za rady a připomínky k obsahu a formě zpracování.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou analogových a digitálních modulací používaných pro přenos signálu přes přenosové kanály. Podrobně rozebírá jak teorii jednotlivých základních modulací a jejich teoretické požadavky na šířku pásma modulovaných signálů, tak teorii vybraných signálů používaných jako modulační signály a jejich vliv na výsledný modulovaný signál. Dále definuje různá kritéria sloužící k posuzování šířky pásma signálů. V praktické části jsou jednotlivé modulace naimplementovány v profesionálním výpočetním prostředí MATLAB a vytvořeny bloky schémat pro jednotlivé modulace v nádstavbovém prostředí Simulink pro simulování dynamických systémů.

Klíčová slova

Modulační signál, modulovaný signál, nosný signál, amplitudové spektrum, šířka pásma

Abstract

This work is engaged in problems of analog and digital modulations used for transmission signals over transmission channels. Contains detail analyse of theoretical aspects primary modulations and their theoretical requests for bandwidth of modulated signals and theory of selected signals used as modulating signals. Defines criteria applied to examine bandwidth of signals. There are implementations of modulations in practical part. They are implemented in professional computing program MATLAB. There are created blocs of schematics for individual modulations in Simulink. Simulink is program simulating dynamical systems.

Key words

Modulating signal, modulated signal, carrier signal, amplitude spectrum, bandwidth

Seznam použitých symbolů a zkratk

AM	Amplitude Modulation
AM-DSB-SC	Amplitude Modulation-Dual Band-Supressed Carier
AM-SSB	Amplitude Modulation-Single Side Band
ASK	Amplitude Shift Keying
BER	Bit Error Ratio
β	index frekvenční modulace
CNR	Carrier to Noise Ratio
D	deviační poměr
DFT	Discrete Fourier Transform
DM	Delta Modulation
Δf	frekvenční zdvih
ΔF_s	frekvenční rozlišení
E_b	střední energie užitečného signálu přenášejícího jeden bit
FFT	Fast Fourier Transform
FM	Frequency modulation
FSK	Frequency Shift Keying
FT	Fourier Transform
$H(t)$	Hilbertova transformace
B	šířka pásma
B_a	absolutní šířka pásma
B_{00}	šířka pásma hlavního laloku
B_3	třidecibelová šířka pásma
B_{20}	dvacetidecibelová šířka pásma
f	kmitočet
$f_i(t)$	okamžitá frekvence modulovaného signálu
f_0	opakovací kmitočet
f_s	vzorkovací kmitočet
f_n	kmitočet nosné vlny
f_m	modulační kmitočet
f_b	bitová rychlost
k	pořadí harmonické složky
k_{FM}	frekvenční citlivost modulátoru FM
k_{PM}	fázová citlivost modulátoru PM
m	činitel amplitudové modulace
$m(t)$	modulační signál
$\overline{m}(t)$	modulační signál podrobený hilbertově transformaci
N	počet vzorků
n	vzorek
N_0	spektrální výkonová hustota šumu
NRZ	Non Return to Zero
η_s	spektrální účinnost
η_e	výkonová účinnost
$\Omega_i(t)$	okamžitá fáze modulovaného signálu
P_e	Probability of a Bit Error

Seznam použitých symbolů a zkratek

PM	Phase Modulation
PAM	Pulse Amplitude Modulation
PCM	Pulse Code Modulation
PPM	Pulse Position Modulation
PSK	Phase Shift Keying
PWM	Pulse Width Modulation
$S(f)$	výkonová spektrální hustota
SIR	Signal to Interference Ratio
SNR	Signal to Noise Ratio
T_0	opakovací perioda
T_b	bitová perioda
T_i	trvání impulzu
T_s	vzorkovací perioda
$u_n(t)$	nosný signál
U_n	amplituda nosné vlny
w	binární posloupnost

1 ÚVOD	1
2 TEORIE SIGNÁLŮ.....	2
2.1 SIGNÁLY SPOJITÉ V ČASE.....	2
2.2 SIGNÁLY NESPOJITÉ V ČASE.....	2
2.3 SIGNÁLY PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ	3
2.4 SIGNÁLY DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ.....	3
3 ANALÝZA SIGNÁLŮ	4
3.1 ANALÝZA SIGNÁLŮ V ČASOVÉ OBLASTI	4
3.2 SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA	4
3.2.1 <i>Fourierova řada</i>	5
3.2.2 <i>Fourierova transformace</i>	7
3.2.3 <i>Diskrétní Fourierova transformace</i>	8
3.2.4 <i>Hilbertova transformace</i>	9
4 VYBRANÉ SIGNÁLY A JEJICH SPEKTRA.....	10
4.1 HARMONICKÁ SLOŽKA	10
4.2 SIGNÁL SLOŽENÝ ZE TŘÍ HARMONICKÝCH SLOŽEK	11
4.3 TROJÚHELNÍKOVÝ SIGNÁL.....	11
4.4 PILOVITÝ SIGNÁL.....	13
4.5 OBDÉLNÍKOVÝ SIGNÁL	14
4.6 BINÁRNÍ SIGNÁL	15
5 ZÁKLADNÍ PARAMETRY MODULACÍ.....	16
5.1 ŠÍŘKA PÁSMO	16
5.2 POMĚR SIGNÁL/ŠUM	17
5.3 VÝKONOVÁ ÚČINNOST A SPEKTRÁLNÍ ÚČINNOST	17
6 MODULACE.....	18
6.1 ANALOGOVÉ MODULACE.....	19
6.1.1 <i>Amplitudová modulace</i>	20
6.1.2 <i>Frekvenční modulace</i>	25
6.1.3 <i>Fázová modulace</i>	27
6.2 DISKRÉTNÍ MODULACE S V ZÁKLADNÍM PÁSMU	28
6.2.1 <i>Pulzně amplitudová modulace PAM</i>	28
6.2.2 <i>Pulzně šířková modulace PWM</i>	30
6.2.3 <i>Pulzně polohová modulace PPM</i>	31
6.3 DIGITÁLNÍ MODULACE S NOSNÝMI VLNAMÍ.....	32
6.3.1 <i>Modulace ASK</i>	32
6.3.2 <i>Modulace FSK</i>	33
6.3.2 <i>Modulace PSK</i>	35
7 PRAKTICKÁ ČÁST	36
7.1 AMPLITUDOVÁ MODULACE AM	36
7.2 AMPLITUDOVÁ MODULACE AM-DSB-SC	38
7.3 AMPLITUDOVÁ MODULACE AM-SSB	39
7.4 FREKVENČNÍ MODULACE FM	40
7.5 FÁZOVÁ MODULACE PM	41
7.6 PULZNĚ AMPLITUDOVÁ MODULACE PAM	42
7.7 MODULACE S AMPLITUDOVÝM KLÍČOVÁNÍM ASK.....	44
7.8 MODULACE S FREKVENČNÍM KLÍČOVÁNÍM FSK.....	45
7.9 MODULACE S FÁZOVÝM KLÍČOVÁNÍM PSK.....	46
8 ZÁVĚR	47

1 Úvod

V dnešní době jednadvacátého století je jedna z nejdůležitějších potřeb člověka získávat informace. Člověk získává informace z různých zdrojů jako například rozlas, televize, tisk, internet a jiných. V této souvislosti vzniká zásadní otázka, jak přenášet informace. Zde se zaměříme na způsoby přenosu informace po metalickém vedení pomocí napětí nebo proudu, vzdušným prostředím pomocí elektromagnetických vln nebo po optických kabelech pomocí světelného toku. Nejběžnějším způsob jak přenášet informace mezi bodem A a bodem B je pomocí amplitudy napětí v závislosti na informaci po metalickém vodiči. Takto lze přenášet pouze jednu informaci v daném čase a to jen na určitou vzdálenost, protože přenosové kanály mají elektrické vlastnosti, které neumožňují přenášet informace na dlouhé vzdálenosti. Z tohoto důvodu se používají signály, které mají na daném přenosovém kanále nejlepší vlastnosti. Tyto signály se vytvářejí v modulátorech, které signály v základním pásmu převádí na signály v přeloženého pásma.

V druhé kapitole je rozebrána základní teorie signálů a jejich dělení.

Pro posuzování modulací je jeden z nejdůležitějších parametrů šířka pásma modulovaných signálů. Z tohoto vyplývá nutná znalost analýzy signálu ve frekvenční oblasti, o které je pojednáváno ve třetí kapitole.

Ve čtvrté kapitole je rozbor vybraných signálů ve frekvenční oblasti, protože spektrum modulačního signálu má zásadní vliv na tvar a šířku spektra modulovaného signálu.

Pro posuzování modulací se nevyužívá jen šířka pásma ale i další parametry, o kterých je více napsáno v páté kapitole.

Stěžejní část této bakalářské práce je teorie jednotlivých modulací v šesté kapitole. U každé modulace je popsán její princip a její teoretický předpoklad na šířku pásma modulovaného signálu. V praktické části (kapitola 7) jsou jednotlivé modulace naimplementovány v programu MATLAB a odsimulovány. Výsledky simulací jsou srovnány s teoretickými předpoklady shrnutými v šesté kapitole.

Součástí této bakalářské práce je i webová verze umístěná na adrese <http://www.modulace.ic.cz>.

2 Teorie signálů

Signál je fyzikální veličina, určená pro přenos informace ve zprávě. Informace je ta část zprávy, která přináší příjemci nové poznatky. Nositeli informace mohou být pouze ty signály, u kterých nelze na straně příjemce přesně predikovat časový průběh. Rozlišují se signály akustické, optické, elektrické, elektromagnetické, mechanické, pneumatické a jiné. V dalším textu se budeme zabývat jen signály elektrickými.

V základním dělení se rozlišují signály spojité v čase (analogové) a signály nespojité v čase (impulzní). Pro stručnost se obvykle tyto kategorie označují jako signály spojité a signály nespojité.

2.1 *Signály spojité v čase*

Mezi spojité signály patří signály analogové, které jsou spojité jak v čase, tak v amplitudě. To znamená, že signál nabývá libovolných hodnot jak na svislé ose, tak na vodorovné ose.

2.2 *Signály nespojité v čase*

Do kategorie nespojitých signálů patří diskrétní signály spojité v amplitudě (nekvantované), které vzniknou vzorkováním analogového signálu. Vzorkováním získáme vzorky signálů (hodnoty na svislé ose) v určitých časových intervalech. Signál je tedy definován v každém bodě svislé osy, ale jen v některých bodech vodorovné osy.

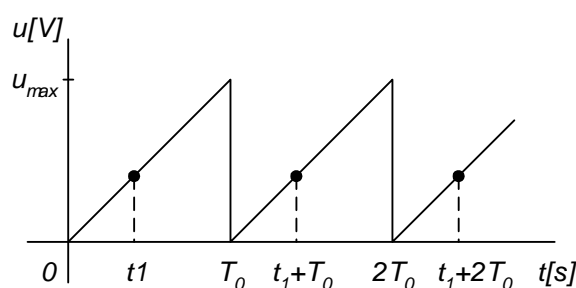
Signály nespojité v amplitudě (kvantované) vzniknou kvantováním diskrétních signálů. Kvantování je změna skutečné hodnoty na nejbližší diskrétní stav. Tyto signály nabývají jen některých hodnot na svislé ose (dáno kvantováním) a některých hodnot na vodorovné ose (dáno vzorkováním).

2.3 Signály periodické a neperiodické

Signály *periodické* jsou takové signály, jejichž funkční hodnoty se opakují v pravidelných intervalech, které se nazývají opakovací perioda, značí se T_0 . Pokud signál označíme $s(t)$, pak matematická podmínka periodicity má podobu

$$s(t) = s(t + kT_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Jak je ukázáno na obrázku 2.1, funkční hodnoty se opakují s periodou T_0 , viz bod v časech t_1 , $t_1 + T_0$ a $t_1 + 2T_0 \dots$.



Obr. 2.1: Periodický signál

V praxi však žádné signály netrvalí nekonečně dlouho, proto je tato podmínka u různých aplikací zmírněna. Pak za periodický signál považujeme analogový signál, který splňuje podmínku periodicity (2.1), který však trvá konečnou dobu a obsahuje v této době dostatečně velký počet svých period.

Neperiodické signály nesplňují základní podmínku periodicity danou rovnicí (2.1).

2.4 Signály deterministické a náhodné

Deterministický signál je takový signál, který lze přesně popsat matematickým modelem tak, že lze vypočítat jeho hodnotu v libovolném čase. Tento signál nese nulové množství informace.

Při pozorování reálných signálů v praxi však při opakovaných měřeních nelze sestavit pevně daný matematický model. Hodnoty parametrů signálu se v čase mění náhodně. Proto nelze vytvořit matematický model, jímž by bylo možné přesně vypočítat hodnotu signálu v libovolném čase. Takové signály nazýváme *stochastické* či *náhodné*.

3 Analýza signálů

Cílem analýzy signálů je určit jejich parametry a charakteristiky. Někdy je potřeba vypočítat jen základní parametry jednoduchými metodami, jindy může jít o složité úlohy používající složité postupy a algoritmy. Výběr metody analýzy závisí nejen na konkrétním cíli, tedy např. na požadovaném parametru či charakteristice, ale i na modelu signálu. Tzn. že výběr metody závisí také na typu signálu např. zda se jedná o signál analogový nebo diskrétní, deterministický nebo stochastický. Vedle vybraného cíle je nutné stanovit, o jaký typ výsledku se zajímáme (posloupnost čísel, graf, text).

3.1 Analýza signálů v časové oblasti

Signály se vyjadřují v originální časové oblasti. Při analýze takového modelu signálu lze získat nejméně dva druhy výsledků.

V případě základních charakteristik lze získat charakteristiku signálů v závislosti na čase, tedy maximální a minimální hodnotu signálu.

Jako další kategorie výsledků jsou globální a další charakteristiky, které poskytují ucelenější a podrobnější analýzu. Sem patří střední a efektivní hodnoty výkonu a energie.

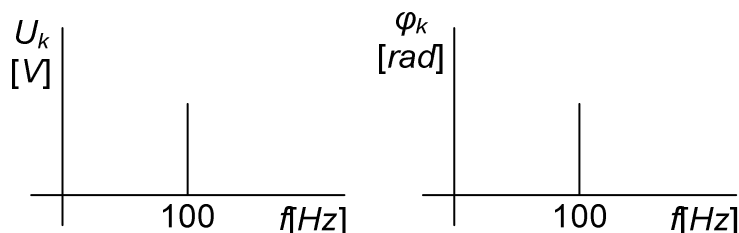
Při analýze mnohdy nevystačíme s parametry a charakteristikami vypočtenými v originální časové oblasti. Aby bylo možné získat další poznatky o signálu, zavádí se *spektrální analýza*.

3.2 Spektrální analýza

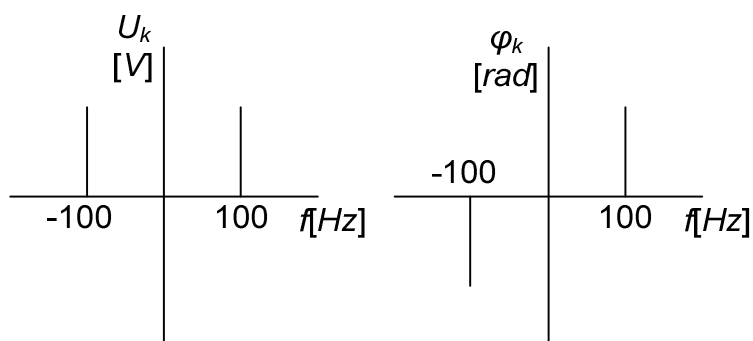
Úlohou spektrální analýzy je nalézt popis signálu pomocí jeho složek ve spektrální oblasti. Toto je vhodné například pro určení šířky pásma signálu. Signál se do frekvenční oblasti převádí pomocí lineárních transformací. Tyto transformace mají podobu vzorce či algoritmu, po jehož aplikaci získáme složky spektra signálu. Toto platí obecně jak pro signály analogové, tak číslicové, periodické či aperiodické a deterministické nebo stochastické. Každý typ signálu bude mít vliv na podobu použitého vzorce či algoritmu. Tyto algoritmy jsou inverzní, tedy umožňují na základě znalosti složek spektra vypočítat nebo odvodit průběh signálu v časové oblasti.

Signál ve frekvenční oblasti lze vyjádřit pomocí amplitudového a fázového spektra. Amplitudové spektrum vypovídá o amplitudě jednotlivých složek spektra, fázové

spektrum vypovídá o počáteční fázi jednotlivých složek spektra signálu. Kladná hodnota fáze vypovídá o předstihu průběhu, záporná hodnota naopak o zpoždění signálu oproti začátku časové osy. Amplitudové a fázové spektrum tedy tvoří spektrum signálu. Amplitudové a fázové spektrum může být v podobě jednostranného spektra zobrazeného na obrázku 3.1 nebo dvoustranného spektra na obrázku 3.2. Je zřejmé, že amplitudové spektrum je funkcí sudou, fázové spektrum je funkcí lichou.



Obr. 3.1: Jednostranné amplitudové a fázové spektrum



Obr. 3.2: Dvoustranné amplitudové a fázové spektrum

Úplnou informaci o spektru signálu tvoří obě části, tedy amplitudové a fázové spektrum. V praxi se většinou používá jednostranné amplitudové spektrum.

3.2.1 Fourierova řada

Při spektrální analýze se jedná o rozklad analogových periodických signálů na jednodušší, bázecké funkce sinus a kosinus, které tvoří jednotlivé složky spektra. Nejčastěji se používá *Fourierova řada*, kdy je daná periodická funkce splňující jisté podmínky, rozložena na nekonečnou řadu harmonických funkcí, které se budou lišit amplitudou, kmitočtem a fází. Souhrnem tohoto nekonečného množství složek dostaneme původní analogový periodický signál.

Spektrum periodického signálu je čárové (diskrétní) a vzdálenost mezi jednotlivými čarami je vždy rovna opakovacímu kmitočtu jeho časového průběhu $f_0 = 1/T_0$.

Mějme periodický signál s dobou periody T_0 , jenž je vyjádřen funkcí $f(t)$. Aby bylo možné analogový periodický signál vyjádřit Fourierovou řadou, musí $f(t)$ splňovat Dirichletovy podmínky.

- Funkce $f(t)$ musí být periodická.
- Uvnitř jedné periody musí být $f(t)$ alespoň po částech spojitá, tj. může mít konečný počet bodů nespojitosti prvního řádu.
- V rámci své periody má $f(t)$ konečný počet lokálních extrémů.
- V rámci své periody je $f(t)$ ohraničená, existují jednostranné limity v ktajních bodech základního intervalu.

Jsou-li tyto podmínky splněny, je možné funkci $f(t)$ vyjádřit pomocí nekonečné Fourierovy řady

$$f(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k 2\pi f_0 t) + b_k \sin(k 2\pi f_0 t)], \quad t \in \{-\infty, \infty\}. \quad (3.1)$$

Uvažovanou funkci $f(t)$ lze rozložit na stejnosměrnou složku a_0 a dále na řadu harmonických (sinusových a kosinusových) složek. Dané složky mají kmitočet odpovídající celistvým násobkům $k = 1, 2, 3, \dots$ $f_0 = 1/T_0$ opakovacího kmitočtu základního průběhu (tj. první harmonické). Výrazy $\sin(k 2\pi f_0 t)$ a $\cos(k 2\pi f_0 t)$ se nazývají bazové funkce.

Amplitudy harmonických složek lze vypočítat vztahy

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(k 2\pi f_0 t) dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.2)$$

$$b_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(k 2\pi f_0 t) dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3)$$

a stejnosměrná složka

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt. \quad (3.4)$$

3.2.2 Fourierova transformace

Fourierova řada umí provádět harmonickou analýzu periodických signálu, pro aperiodické ji použít nelze. Na aperiodické signály se lze dívat jako na signály periodické s dobou periody $T_0 \rightarrow \infty$, tedy rostoucí nade všechny meze. Potom vzdálenost mezi spektrálními čarami bude odpovídat velikosti základní harmonické $f_0 \rightarrow 1/T_0$, která se blíží k nule a diskrétní spektrum přechází ve spektrum spojitě.

Spektrum aperiodického signálu bude mít spojitý charakter a bude kopírovat tvar obálky čarového spektra, příslušejícího periodickým případům.

Velikost spektrálních čar klesá se zvětšující se periodou a pro $T_0 \rightarrow \infty$ by tato velikost byla nulová. Pracovat s takto nekonečně malými hodnotami je nevhodné, proto se zmíněné spojitě spektrum určitého aperiodického signálu $f(t)$ popisuje pomocí funkce spektrální hustoty $F(f)$. Přechod od signálu $f(t)$ v časové oblasti k jeho reprezentaci $F(f)$ v kmitočtové oblasti určuje přímá *Fourierova transformace* (FT - Fourier Transform). Vzájemné vztahy mezi $f(t)$ a $F(f)$ popisují rovnice

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j 2\pi f t} dt, \quad (3.5)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j 2\pi f t} df. \quad (3.6)$$

Fourierův obraz $F(f)$ je komplexním číslem a lze jej zapsat pomocí amplitudy a fáze

$$F(f) = |F(f)|e^{j\phi(2\pi f)}. \quad (3.7)$$

Amplituda $|F(f)|$ vyjádřená jako funkce f , se nazývá amplitudové spektrum funkce $f(t)$. Fáze $\phi(f)$ vyjádřená jako funkce f , je fázové spektrum funkce $f(t)$. Amplitudové spektrum je pro reálné signály sudou funkcí, fázové spektrum je pro reálné signály funkcí lichou. Vzhledem k těmto skutečnostem stačí se omezit jen na oblast kladných kmitočtů.

3.2.3 Diskrétní Fourierova transformace

Pro analýzu signálů lze použít Fourierovu řadu pro periodické signály nebo Fourierovu transformaci pro aperiodické signály. V praxi je však často k dispozici pouze N okamžitých hodnot signálu $x(0); x(T_s); x(2T_s) \dots x(N-1)T_s$, získaných vzorkováním s periodou T_s během určité doby $T = (N-1)T_s$. Pokud je taková funkce považována za vzorkovaný periodický průběh s periodou T , lze z těchto diskrétních vzorků vypočítat jeho diskrétní vzorky frekvenčního spektra a naopak. Pro tuto analýzu se používá *Diskrétní Fourierova transformace* (DFT – Discrete Fourier Transform).

Nechť je v časovém intervalu T definován spojitý signál $f(t)$ a jeho funkční hodnoty se opakují s periodou T . V intervalu T nahradíme tento signál časovou posloupností N vzorků $x(0); x(T_s); x(2T_s) \dots x(N-1)T_s$, odečtených v diskrétních časových okamžicích nT_s , kde $n = 1, 2, \dots, N-1$ je pořadové číslo vzorku a T_s je perioda vzorkování. Pro frekvenci vzorkování $F_s = 1/T_s$ musí platit, že je dvakrát větší, než nejvyšší kmitočet obsažený v signálu $f(t)$.

K takto navzorkovanému signálu, jenž má N vzorků, lze stanovit odpovídající soubor N vzorků spektra, které jsou vzdáleny o frekvenci $\Delta F_s = 1/NT_s$ a jsou určeny Diskrétní Fourierovou transformací, tedy zápisem

$$DF(kF_s) = T_s \sum_{n=1}^{N-1} f(nT_s) e^{-j2\pi kn/N}, \quad (3.8)$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ určuje řád harmonické frekvenčního spektra a činitel n představuje pořadové číslo vzorku.

Výpočet Diskrétní Fourierovy transformace podle uvedeného vztahu vyžaduje N^2 komplexních součinů a N^2 komplexních součtů. Takto náročný výpočet není použitelný v aplikacích reálného výpočtu. V takových případech se používá efektivní postup výpočtu nazývaný rychlá Fourierova transformace (FFT – Fast Fourier Transform). Rychlá Fourierova transformace vyžaduje jen $N \log_2(N)$ komplexních součinů a $N \log_2(N)$ komplexních součtů. V počítačových matematických programech je kladen důraz na rychlý výpočet, proto se používá rychlá Fourierova transformace.

3.2.4 Hilbertova transformace

U Fourierovy transformace je vzor $f(t)$ funkcí času a její Fourierův obraz $F(f)$ funkcí kmitočtu. U *Hilbertovy transformace* je jak vzor $f(t)$, tak jeho Hilbertův obraz $H(t)$, funkcí času. Hilbertova transformace je dána vztahem

$$H(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (3.9)$$

Hilbertova transformace je lineární, proto zpětná Hilbertova transformace přiřazuje k Hilbertově obrazu jeho vzor podle vztahu

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (3.10)$$

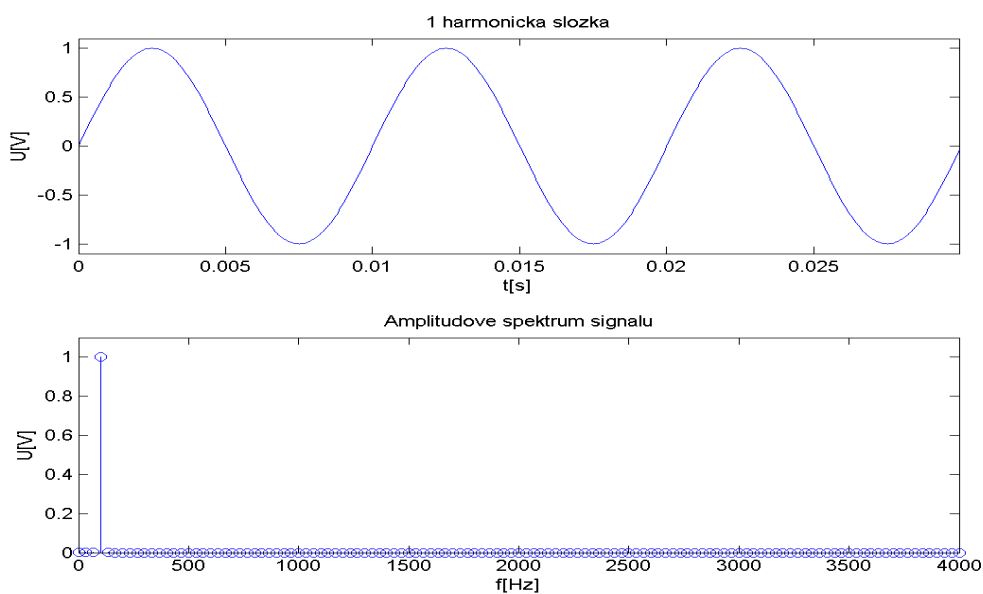
Hilbertova transformace má v radioelektronice několik využití. Například se využívá při amplitudové modulaci s jedním potlačeným postranním pásmem (SSB). Těchto poznatků využijí při simulaci této modulace.

4 Vybrané signály a jejich spektra

Ve třetí kapitole se pojednávalo o signálech a výpočtu jejich spekter. V této kapitole si ukážeme spektra vybraných signálů, které budou použity jako modulační signály pro modulace v praktické části práce.

4.1 Harmonická složka

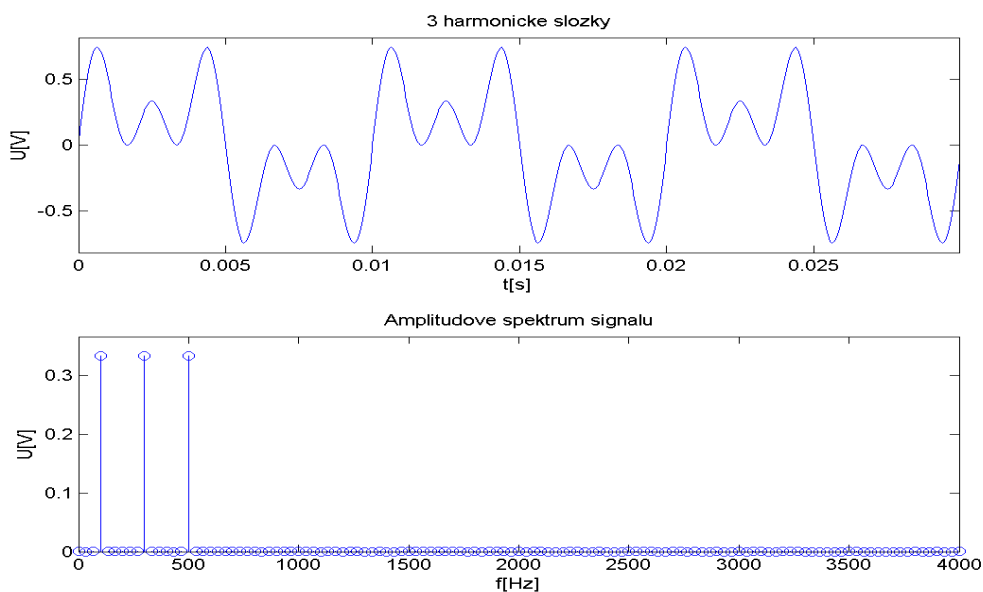
Periodický signál složený z jedné harmonické složky, lze vyjádřit ve frekvenčním zobrazení jednoduše. Jeho amplitudové spektrum obsahuje pouze jednu složku. Pokud tento signál bude nasuperponován na stejnosměrnou složku, ve spektrech přibude další složka, která bude reprezentovat nulový kmitočet, tedy stejnosměrnou složku. Na obrázku 4.1 je zobrazen sinusový signál s kmitočtem $f_1 = 100\text{Hz}$ a jeho amplitudové spektrum.



Obr. 4.1: Harmonický signál a jeho spektrum

4.2 Signál složený ze tří harmonických složek

Je-li signál složený z více harmonických složek, respektive třemi, projeví se to v amplitudovém a fázovém spektru třemi složkami plus jedna složka reprezentující stejnosměrnou složku signálu. První harmonická je dána kmitočtem $f_1 = 100\text{Hz}$, druhá harmonická je dána kmitočtem $f_2 = 300\text{Hz}$ a třetí harmonická kmitočtem $f_3 = 500\text{Hz}$. Na obrázku 4.2 je zobrazen signál a jeho amplitudové spektrum.



Obr. 4.2: Signál složený ze tří harmonických složek a jeho spektrum

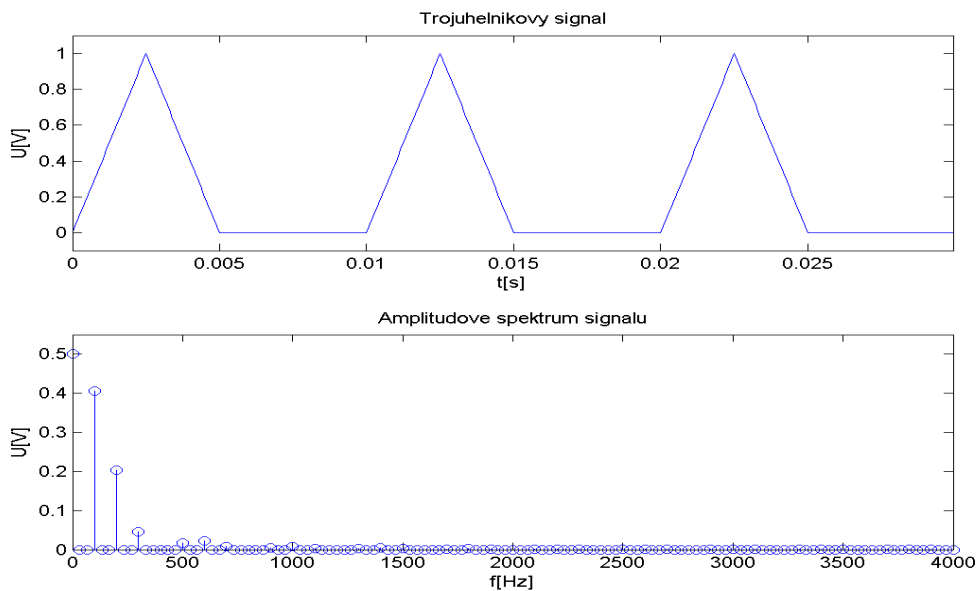
Následující kapitoly 4.3, 4.4, a 4.5 pojednávají o signálech které mají společné vlastnosti. Ať už trojúhelník, pila nebo obdélník, mají délku impulsu T_i , která má odpovídající tvar trojúhelníku, pily nebo obdélníku. Opakovací perioda T_0 představuje s jakou periodou se signálu opakuje. Hodnota pro časy T_i až T_0 je tedy nulová. Pomocí hodnot T_i a T_0 lze nastavit jak šířku impulsu, tak opakovací periodu a s tím související střidu signálu. Konkrétní hodnoty budou pro všechny tři kapitoly stejné a to $T_i = 5\text{ms}$ a $T_0 = 10\text{ms}$.

4.3 Trojúhelníkový signál

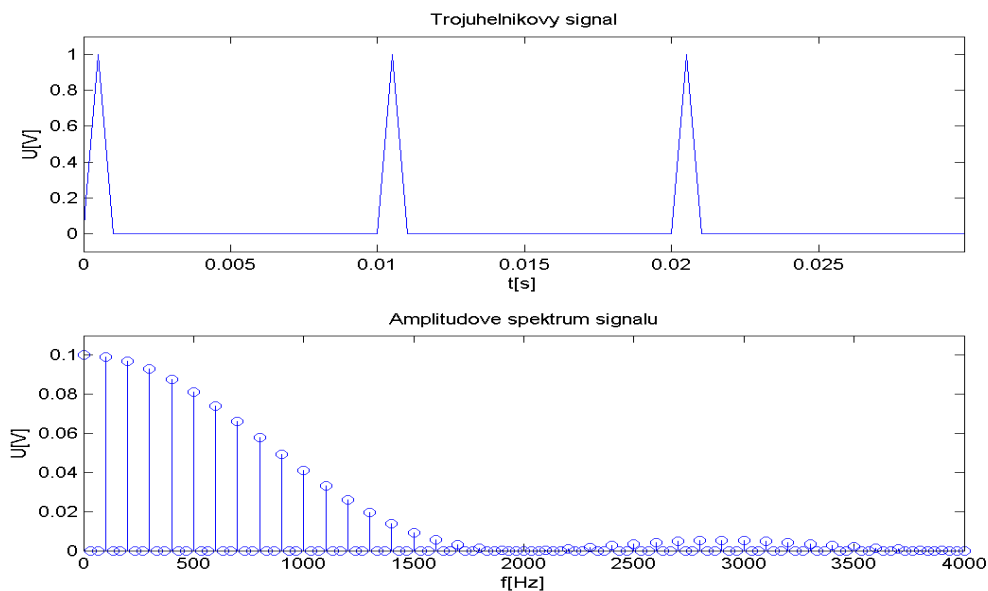
Trojúhelníkový signál se skládá z lineárního náběhu a doběhu, jež se opakují. Protože signál obsahuje ostré zlomy na vrcholech, bude jeho spektrum nekonečné. Signál má

4 Vybrané signály a jejich spektra

v amplitudovém spektru nenulové hodnoty pro kmitočty $k f_0$ kromě hodnot $k 2 f_i$, kde $k = 1, 2, 3, \dots$. Trojúhelníkový signál se střídou impulzů 1:1 ($T_0 = 2T_i$) a jeho spektrum je na obrázku 4.3. Trojúhelníkový signál se střídou 1:10 ($T_0 = 10T_i$) je na obrázku 4.4.



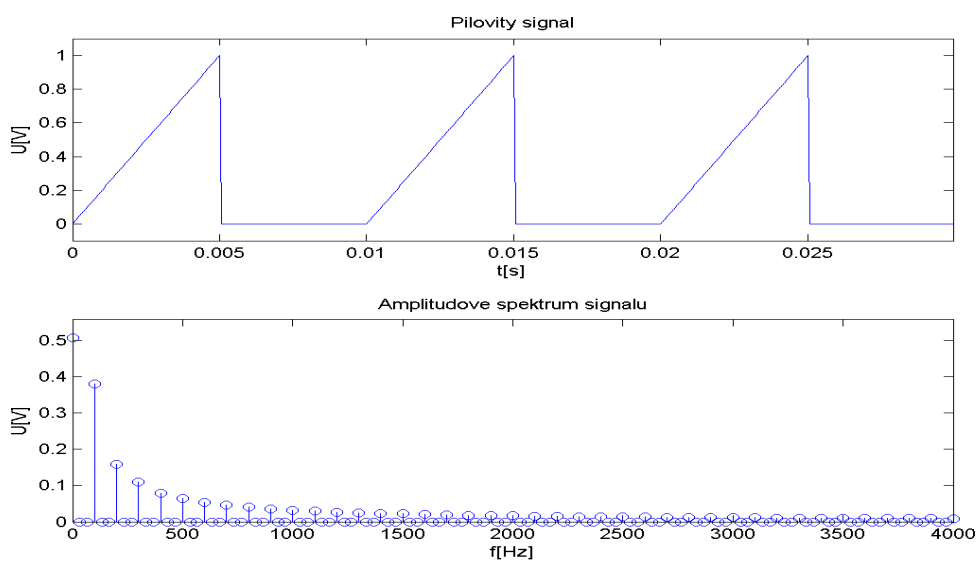
Obr. 4.3: Trojúhelníkový signál a jeho spektrum (střída 1:1)



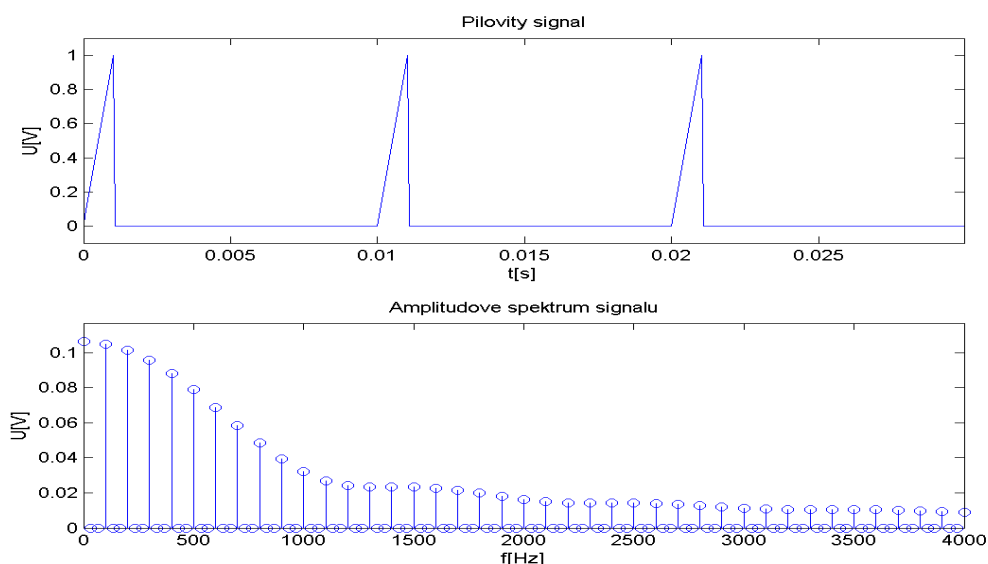
Obr. 4.4: Trojúhelníkový signál a jeho spektrum (střída 1:10)

4.4 Pilovitý signál

Pilovitý signál se skládá z lineárního náběhu a skokového doběhu. Skokový doběh spolu s ostrým zlomem obsahuje nekonečné množství kmitočtů, proto je amplitudové spektrum taktéž nekonečné. U pily amplitudové spektrum nabývá nenulových hodnot pro kf_0 . Pilovitý signál se střídou (1:1) a jeho spektrum je na obrázku 4.5. Signál se střídou (1:10) je na obrázku 4.6.



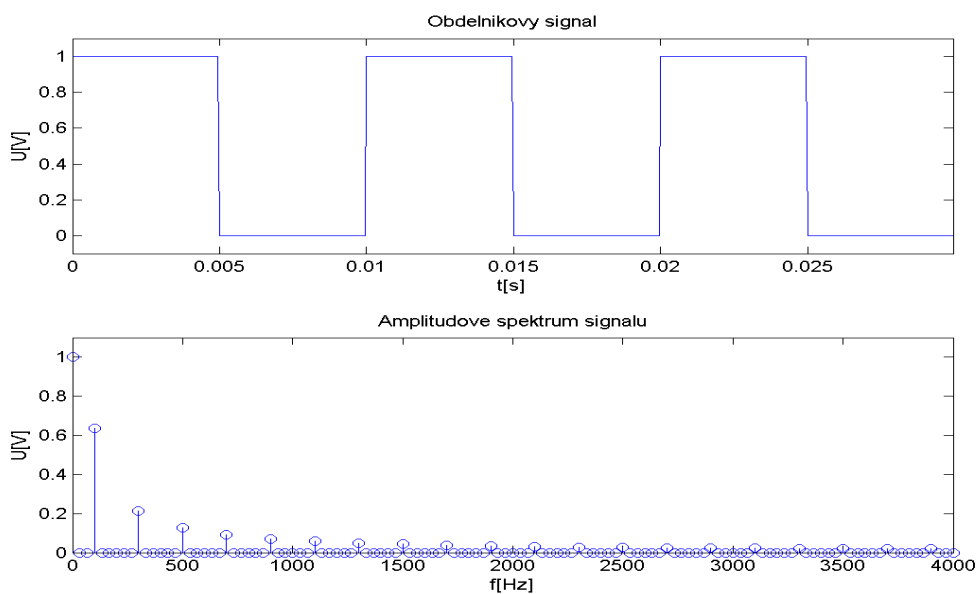
Obr. 4.5: Pilovitý signál a jeho spektrum (střída 1:1)



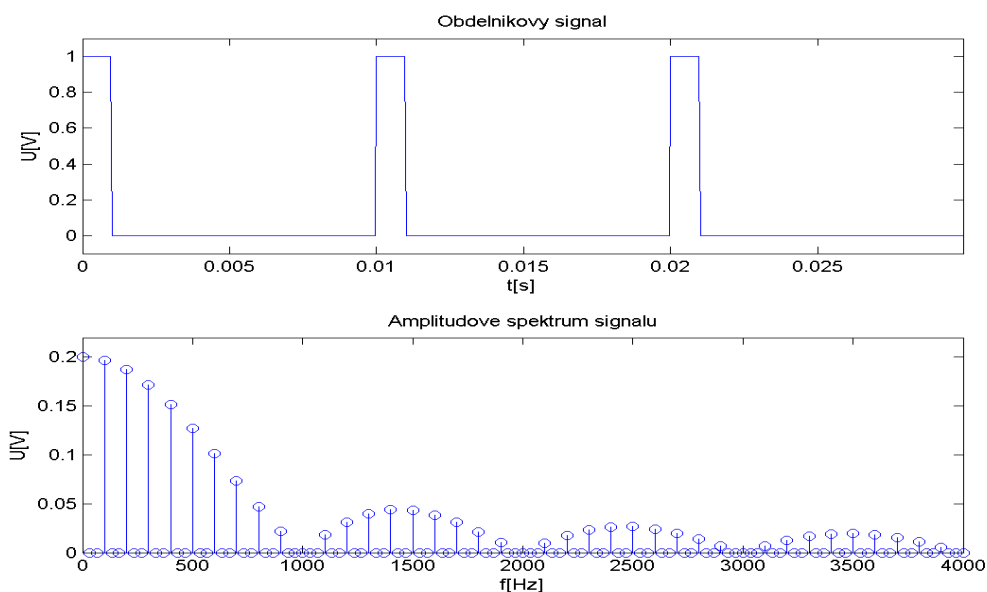
Obr. 4.6: Pilovitý signál a jeho spektrum (střída 1:10)

4.5 Obdélníkový signál

Obdélníkový signál je tvořen dvěma konstantními úrovněmi nulové a kladné polarity. Amplitudové spektrum obsahuje nekonečně mnoho složek, které nabývají opět nenulových hodnot pro kmitočty kf_0 kromě hodnot kf_i . Obdélníkový signál se střídou (1:1) a jeho spektrum je na obrázku 4.74 a signál se střídou (1:10) a jeho spektrum je na obrázku 4.8.



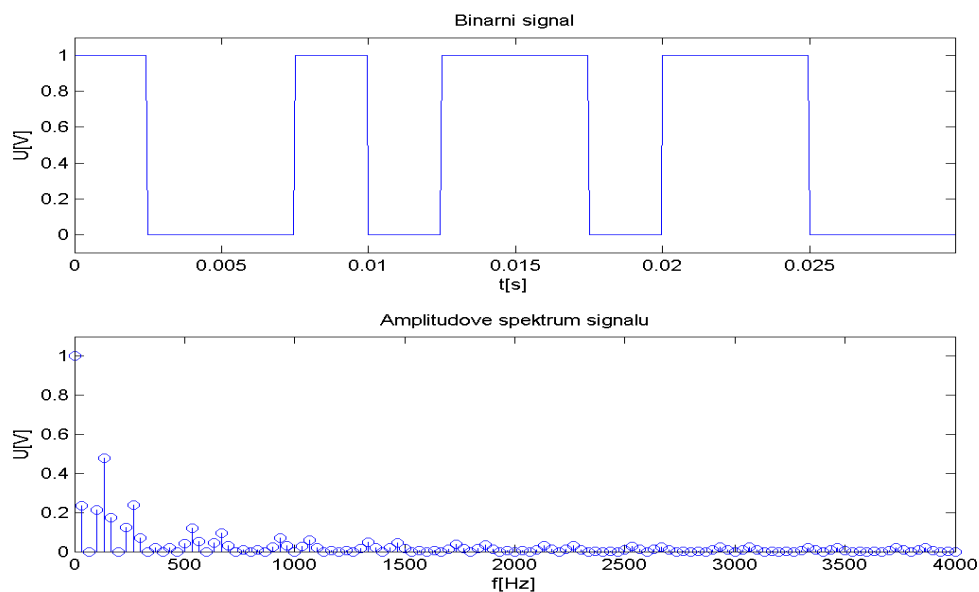
Obr. 4.7: Obdélníkový signál a jeho spektrum (střída 1:1)



Obr. 4.8: Obdélníkový signál a jeho spektrum (střída 1:10)

4.6 Binární signál

Tento signál představuje dvojkový signál, jehož impulzy jsou prodloužené. Logická jednička realizovaná jako kladná amplituda, logická nula jako nulová amplituda. Délka impulzu je $T_i = 2,5\text{ms}$. Binární signál je vytvořen z binární posloupnosti $w = [1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]$. Binární signál a jeho spektrum je na obrázku 4.9.



Obr. 4.9: Binární signál a jeho spektrum

Programy pro generování vybraných signálů rozebíraných v této kapitole jsou v příloze C na CD v adresáři *Generátory modulačních signálů*.

5 Základní parametry modulací

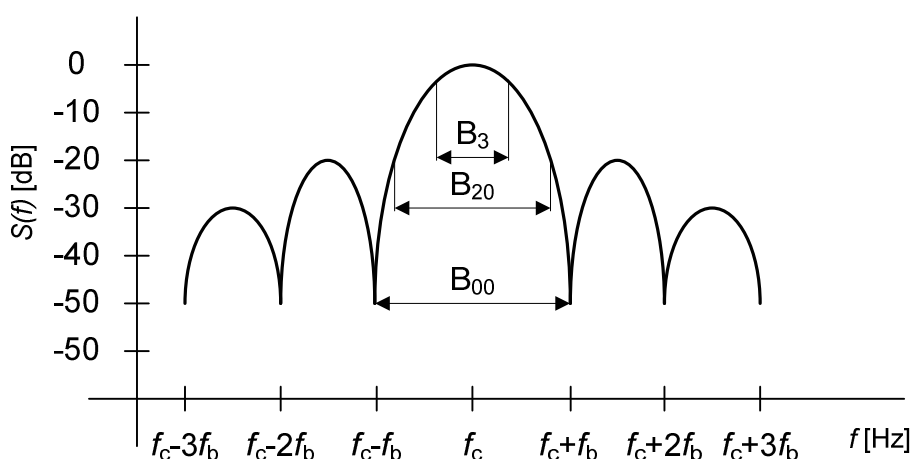
5.1 Šířka pásma

Nejdůležitějším parametrem modulací je vysokofrekvenční šířka pásma pásmových modulovaných signálů a značí se B . Šířka pásma se určuje z výkonové spektrální hustoty pásmových signálů. K jejímu určení se modulovaný signál vyjádří pomocí komplexní obálky v základním pásmu a výsledná výkonová spektrální hustota pásmového modulovaného signálu $S(f)$ je dána

$$S(f) = \frac{1}{4} [S_B(f - f_c) + S_B(f + f_c)]. \quad (5.1)$$

Absolutní šířka pásma B_α je dána rozsahem frekvencí, v němž má daný signál nenulovou spektrální hustotu. Tato definice je nevhodná, protože některé modulační signály mají neomezené pásmo, tudíž i jejich modulované signály mají neomezené pásmo.

Třidecibelová šířka pásma B_3 je dána rozsahem frekvencí, při nichž klesne výkonová spektrální hustota $S(f)$ o 3 dB (na polovinu). *Dvacetidecibelová šířka pásma* B_{20} je dána poklesem o 20dB. Poměr B_{20} / B_3 se nazývá *činitel tvaru*. Tento parametr výstižně popisuje strmost hlavního laloku křivky $S(f)$.



Obr.5.1: Šířka pásma

5.2 Poměr signál/šum

Pro určení kvality analogového nebo digitálního signálu je rozhodující především poměr signál/šum, což je poměr mezi výkonem užitečného signálu ku výkonu šumového signálu. Pokud se poměr vztahuje k modulovanému signálu, označuje poměr nosného signálu ku šumu a značí se *CNR* (Carrier to Noise Ratio). U signálů v základním pásmu se potom označuje jako poměr signál/šum a značí se *SNR* (Signal to Noise Ratio). Jako další parametr se používá poměr signál/interference, značí se *SIR* (Signal to Interference Ratio), kde pojem interference představuje součet šumů a skutečných interferencí, což představuje složky harmonického a intermodulačního zkreslení.

U digitálních signálů se dále používá *pravděpodobnost chyby v přenosu bitu* P_e (Probability of a Bit Error), definovaná pro určitý komunikační systém na základě teoretického rozboru. P_e je poměr počtu chybných bitů přenesených za jednu sekundu k celkovému počtu přenesených bitů za jednu sekundu. Skutečná chybovost, definovaná jako P_e , ale změřená na konkrétním systému, se označuje termínem *bitová chybovost* *BER* (Bit Error Ratio).

Chybovost *BER* je závislá na poměru nosná/šum *CNR*, a proto ji lze charakterizovat funkční závislostí $BER = f(CNR)$.

5.3 Výkonová účinnost a spektrální účinnost

Výkonová účinnost (power efficiency) nebo také *energetická účinnost* (energy efficiency) se vyjadřuje pro digitální modulace s nosnými vlnami a je definovaná vztahem $\eta_e = N_0 / E_b$, kde N_0 je spektrální výkonová hustota šumu a E_b je střední energie užitečného signálu přenášejíciho jeden bit. Tento poměr je definován při určité specifikované bitové chybovosti *BER* (obvykle pro $BER = 10^{-5}$).

Spektrální účinnost (spectral efficiency) nebo také *pásmová účinnost* (bandwidth efficiency) se definuje pro digitální modulace s nosnými vlnami vztahem $\eta_s = f_b / B$, kde f_b je bitová rychlost a B je šířka pásma kanálu.

6 Modulace

Pro přenos informací se využívají přenosové cesty. Tyto přenosové cesty mají elektrické vlastnosti, které nepříznivým způsobem ovlivňují přenášený signál a neumožňují jeho přenos na delší vzdálenosti v *základním pásmu*. Z tohoto důvodu se využívají přenosy v *přeloženém pásmu*, při kterém se přenášejí takové signály, které se danou přenosovou cestou šíří nejlépe.

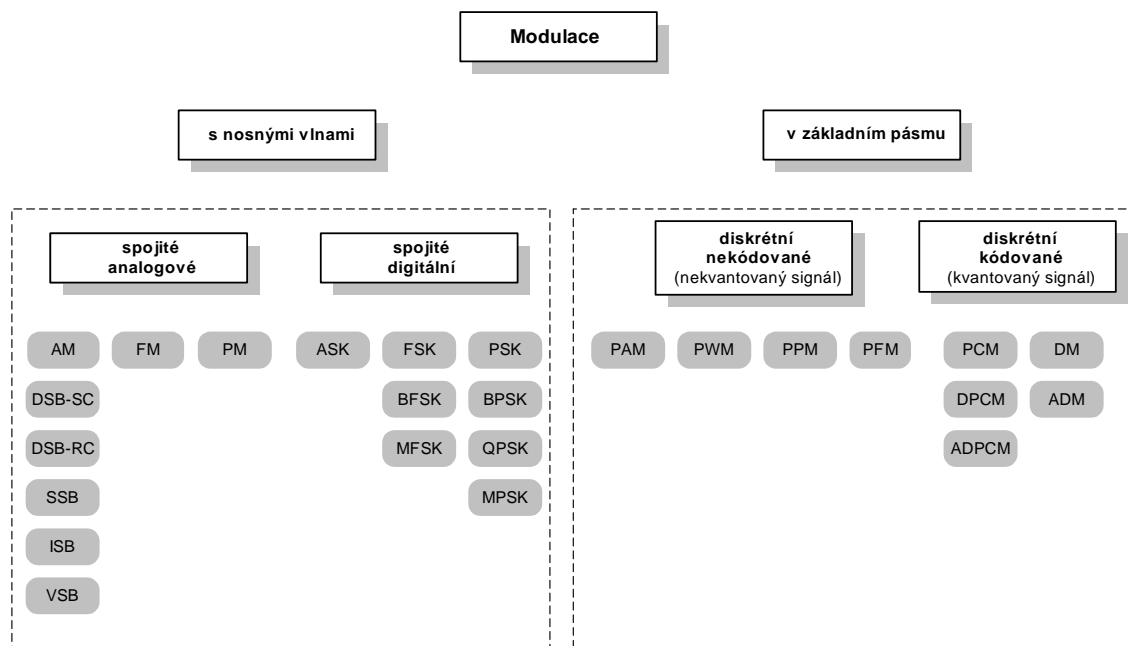
Modulace je tedy proces, při kterém se signál ze základního pásma převádí na signál v přeloženém pásmu. Modulace se provádí v zařízení nazývaném *modulátor*. Naopak zpětný proces se nazývá demodulace a provádí se v *demodulátoru*.

Signál, který nese užitečnou informaci a vstupuje do modulátoru se nazývá *modulační signál*. Modulační signál se v modulátoru namoduluje na vysokofrekvenční složku, která zajistí uložení signálu do vyšší kmitočtové oblasti (přeložené pásmo). Tato vysokofrekvenční složka je označována jako *nosný signál* (nosná vlna). Výstupem modulátoru je *modulovaný signál*.

Jednotlivé typy modulací jsou na obrázku 6.1. Analogové modulace jsou nejstarší a charakteristický je pro ně analogový modulační signál, který ovlivňuje jeden ze tří parametrů nosné vlny. Může to být amplituda, kmitočet nebo fáze nosné vlny. Vývojově mladší jsou modulace diskrétní, jejichž modulační signál je diskrétní. Nejmladšími modulacemi jsou modulace digitální, které se prosazují díky rozvoji digitálních přenosů. Modulačním signálem, nejtypičtěji signál PCM/NRZ, se ovlivňuje amplituda, kmitočet, fáze nebo kombinace zmíněných parametrů vysokofrekvenční nosné vlny.

Pro každou modulaci je k dispozici

- vytvořený blok v Simulinku v příloze B na CD,
- implementace v MATLABu pomocí *m* souboru v příloze C na CD v adresáři *Modulace*
- a obrázky modulovaných signálů pro vybrané signály popsané ve čtvrté kapitole umístěné v příloze A na CD v adresáři pod názvem dané modulace.



Obr. 6.1: Rozdělení modulací

6.1 Analogové modulace

Vývojově nestarší systémy pro komunikaci využívaly pro přenos analogovou *amplitudovou modulaci* AM, k níž se později připojila analogová *frekvenční modulace* FM a analogová *fázová modulace* PM. Amplitudová modulace a její varianty se používají spíše u jednoduchých systémů, jako je například rozhlas AM či radioamaterské stanice apod. Modulace FM se uplatnila v náročnějších aplikacích, jako je stereofonní rozhlas FM, systém družicové televize apod. Analogovým modulacím je věnována menší pozornost, protože jsou ve většině oblastí rychle nahrazovány modulacemi digitálními.

Princip analogových modulací

Při analogové modulaci se obecným modulačním signálem $m(t)$ moduluje parametr harmonické vysokofrekvenční nosné vlny $u_n(t)$. Modulační signál může mít libovolný charakter v závislosti na veličině, kterou je reprezentován, v dalším textu se však bude předpokládat signál napěťový.

Pokud se mění amplituda nosné vlny v závislosti na modulačním signálu, jedná se o modulaci amplitudovou, která patří do kategorie lineárních modulací. U lineárních modulací jsou v kmitočtovém spektru modulovaného signálu obsaženy jen složky, které

odpovídají jednotlivým harmonickým v modulačním signálu. Pokud se mění kmitočet nosné vlny v závislosti na modulačním signálu, jedná se o kmitočtovou modulaci. A pokud se mění okamžitá fáze nosné vlny podle modulačního signálu, jedná se o fázovou modulaci. V obou případech, jak u kmitočtové tak u fázové modulace se jedná o nelineární modulace. U nelineárních modulací jsou v kmitočtovém spektru modulovaného signálu obsaženy nejen jednotlivé harmonické z modulačního signálu, ale také jejich vzájemné intermodulační produkty.

6.1.1 Amplitudová modulace

Základním a nejstarším typem je amplitudová modulace se dvěma postranními pásmy a nepotlačenou nosnou vlnou (AM – Amplitude Modulation). Dále pak existují její varianty, které tuto základní modulaci nějakým způsobem zlepšují. Je to modulace s jedním postranním pásmem a další, které vzniknou částečným nebo plným potlačením nosné vlny.

6.1.1.1 Amplitudová modulace AM

Při amplitudové modulaci se amplituda nosné vlny $u_n(t)$ mění lineárně s modulačním signálem $m(t)$. Průběhy těchto signálů lze vyjádřit

$$m(t) = U_m \cos(2\pi f_m t), \quad (6.1)$$

$$u_n(t) = U_n \cos(2\pi f_n t). \quad (6.2)$$

Časový průběh daného modulovaného napětí je dán

$$u_{AM}(t) = [U_n + U_m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_n t), \quad (6.3a)$$

$$u_{AM}(t) = [U_n + m(t)] \cos(2\pi f_n t), \quad (6.3b)$$

$$u_{AM}(t) = U_n [1 + m \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_n t), \quad (6.4)$$

kde veličina $m = U_m / U_n$ je *činitel amplitudové modulace*. Po vyjádření v procentech se nazývá *hloubka modulace*. Aby nedocházelo ke zkreslení při modulaci, musí být splněna podmínka $0 \leq m \leq 1$, v opačném případě dochází k nežádoucímu efektu -

přemodulování. Pro správné namodulování musí dále platit, že kmitočet nosné vlny f_n je mnohonásobně vyšší než největší modulační kmitočet $f_{m \max}$.

Amplitudová modulace s oběma postranními pásmy a nepotlačenou nosnou je základním typem amplitudových modulací a značí se symbolem AM (Amplitude Modulation).

Šířka pásma modulovaného signálu AM

Při modulaci AM jediným harmonickým signálem se bude frekvenční spektrum skládat ze samotné nosné o amplitudě U_n a ze dvou postranních modulačních složek o amplitudách $U_m/2 = mU_n/2$, ležících symetricky po obou stranách nosné vlny na frekvencích

$f_n + f_m$ a $f_n - f_m$. Při hloubce modulace $m = 100\%$ zabírá nosná vlna, která nenese informaci, 2/3 celkového výkonu a obě postranní pásma, nesoucí informaci, celkem jen 1/3 celkového výkonu.

Lze-li obecný modulační signál $m(t)$ popsat matematickou rovnicí, lze vyjádřit časový průběh modulovaného signálu vztahem

$$u_{AM}(t) = U_n[1 + k_{AM}m(t)]\cos(2\pi f_n t), \quad (6.5)$$

kde k_{AM} je konstanta, označovaná jako *amplitudová citlivost modulátoru AM*. Opět může nabývat hodnot od 0 do 1 a v případě uvedení v procentech se nazývá procento nebo *hloubka modulace*.

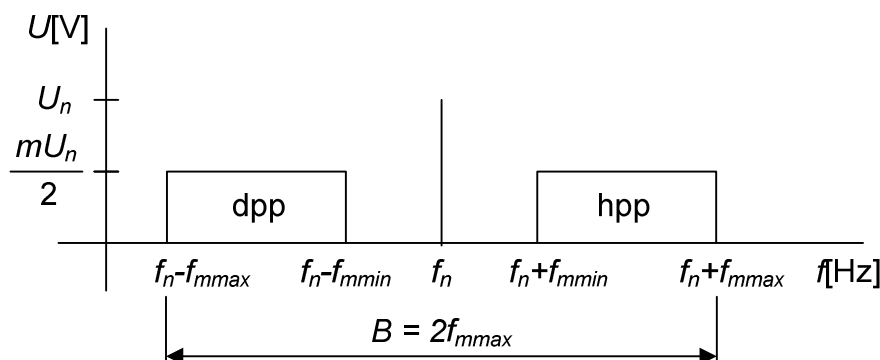
Činitel amplitudové modulace lze v praxi pro modulační signál určit z maximální amplitudy $U_{n \max}$ a minimální amplitudy $U_{n \min}$ modulovaného signálu, a to vztahem

$$m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}, \quad (6.6)$$

Uvažujme obecný signál, kterým chceme modulovat nosnou vlnu o frekvenci f_n .

Modulační signál bude mít největší kmitočet $f_{m \max}$ a minimální kmitočet $f_{m \min}$.

Výsledné spektrum je na obrázku 6.2.



Obr. 6.2: Šířka pásma AM

Spektrum se skládá ze dvou postranních pásem, která nesou stejnou informaci, a ze složky nosného kmitočtu. Šířku spektra modulovaného signálu lze popsat vztahem $B = 2f_{m \max}$.

Protože tato modulace plýtvá kmitočtovým spektrem, vznikla modulace s jedním postranním pásmem, označovaná jako SSB (Single Side Band). Další nevýhodou je velký výkon nosné vlny, která nenese žádnou informaci. Tato nevýhoda se odstraňuje potlačením nosné vlny při modulaci. Nosná vlna se přitom může potlačit částečně nebo úplně.

6.1.1.2 Amplitudová modulace AM-DSB

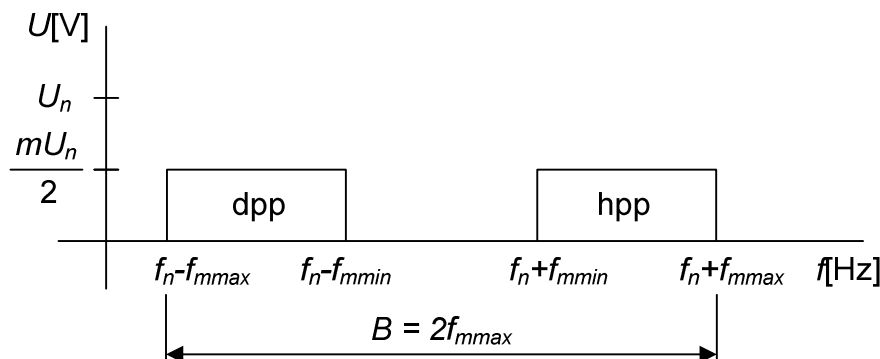
U AM modulace nosná vlna představuje velkou část vysílacího výkonu, proto se již v začátcích objevila myšlenka vytvořit takovou modulaci, při které by se nosná vlna zcela nebo alespoň částečně potlačila. Takové modulace se značí AM-DSB (DSB Dual Side Band). Zde se zaměříme na modulaci se dvěma postranními pásmy a zcela potlačenou nosnou, která se značí AM-DSB-SC (SC Supressed Carier).

Modulovaný signál AM-DSB-SC lze získat prostým vynásobením nosné vlny $u_n(t)$ s modulačním signálem $m(t)$, tedy

$$u_{DSB}(t) = u_n(t)m(t) = U_n \cos(2\pi f_n t)m(t). \quad (6.7)$$

Šířka pásma modulovaného signálu AM-DSB-SC

Výsledné spektrum modulovaného signálu je totožné jako u AM, jen zde není zastoupena čára s nosnou vlnou a je zobrazeno na obrázku 6.3.



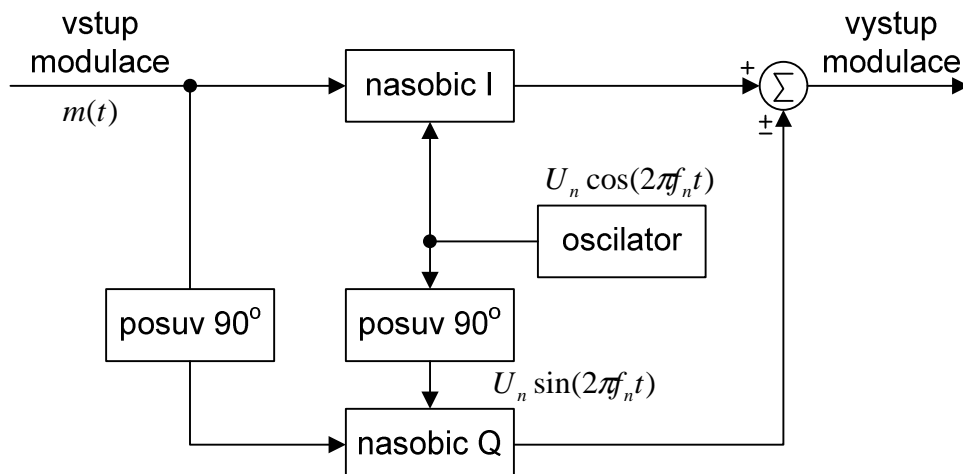
Obr. 6.3: Šířka pásma AM-DSB-SC

6.1.1.3 Amplitudová modulace AM-SSB

Protože u amplitudových modulací je jedna a tatáž zpráva přenášena dvakrát v obou postranních pásmech, je možné na vysílači potlačit nejen nosnou, ale také jedno postranní pásmo. Tímto vzniká amplitudová modulace s jedním postranním pásmem (SSB Single Side Band).

Modulovaný signál vytvořený SSB lze generovat filtrační metodou. Ta spočívá v modulování základní modulací a následnou pásmovou propustí dolního nebo horního postranního pásma. U filtru jsou důležité strmé přechody, aby nebyly omezeny užitečné kmitočty a naopak, aby kmitočty, které nemají v modulovaném signálu být obsaženy, byly co nejvíce potlačeny.

Druhý způsob modulátoru, který je uveden na obrázku 6.4, SSB, využívá tzv. fázovou diskriminační metodu. Modulátor se skládá ze dvou násobičů I a Q, na násobič I se přivede modulační signál a nosná vlna a na násobič Q se přivádějí jak modulační signál tak nosná vlna přes fázový posouvač 90° . Posunutí o 90° představuje Hilbertovu transformaci. V obou násobičích se provádí modulace DSB-SC, přičemž jedna odpovídající si dvojice jejich postranních pásem je vždy vzájemně ve fázi a druhá v protifázi. Sečtením těchto výstupů se získá horní postranní pásmo, odečtením vzniká dolní postranní pásmo.



Obr. 6.4: Modulátor SSB

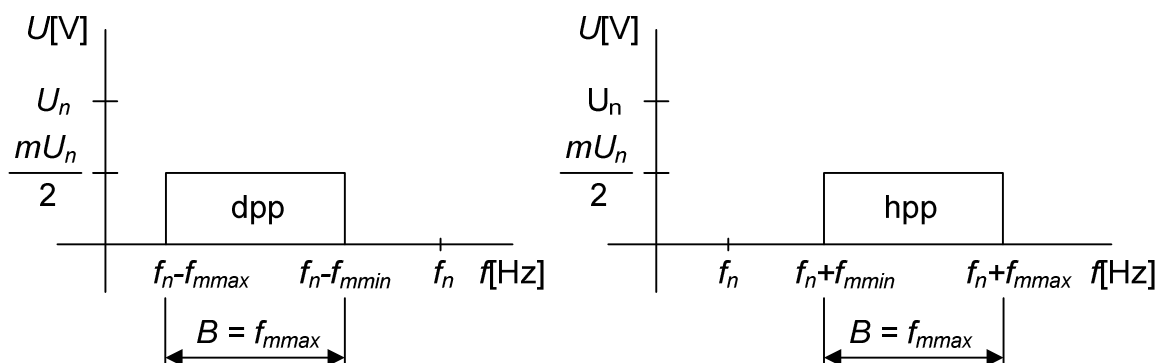
Výsledné modulované napětí lze vyjádřit vztahem

$$u_{SSB}(t) = \frac{U_c}{2} \left[m(t) \cos(2\pi f_c t) \pm \bar{m}(t) \cos(2\pi f_c t) \right]. \quad (6.8)$$

Podle znaménka modulací vznikne buď horní (v případě sčítání) nebo dolní postranní pásmo (v případě odečítání). Signál $\bar{m}(t)$ je vlastně původní modulační signál, který byl podroben Hilbertově transformaci.

Šířka pásma modulovaného signálu AM-SSB

Šířka spektra modulace AM-SSB je dáno maximální složkou $f_{m \max}$ obsaženou v modulačním signálu $m(t)$. Podle přenosu dolního nebo horního postranního pásma se spektrum posune níže nebo výše od nosného kmitočtu. Spektrum je naznačeno na obrázku 6.5.



Obr. 6.5: Šířka pásma AM-SSB

6.1.2 Frekvenční modulace

Frekvenční modulace FM (Frequency modulation) společně s fázovou modulací spadá do kategorie úhlových modulací, neboť se u nich modulačním signálem ovlivňuje fázový uhel nosné vlny. Přitom amplituda modulované nosné, resp. její obálka zůstává konstantní. Signál s úhlovou modulací je možné vyjádřit obecným vztahem

$$u_m(t) = U_n \cos[\Omega_i(t)], \quad (6.9)$$

kde $\Omega_i(t)$ je *okamžitá fáze* modulované nosné vlny a U_n je konstantní amplituda nosné vlny. U frekvenční modulace je okamžitá frekvence $f_i(t)$ modulovaného signálu rovna součtu konstantní frekvence f_n nemodulované nosné vlny a časově proměnné složky, přímo úměrné modulačnímu napětí $m(t)$, tedy

$$f_i(t) = f_n + k_{FM} m(t), \quad (6.10)$$

kde k_{FM} je *frekvenční citlivost modulátoru FM* vyjádřena v jednotkách $[Hz/V]$. Integrací a vynásobením vztahu (6.10) hodnotou 2π , se odvodí vztah pro okamžitou hodnotu fáze modulovaného signálu vztahem

$$\Omega_i(t) = 2\pi f_n t + 2\pi k_{FM} \int_0^t m(t) dt. \quad (6.11)$$

Dosazením vzorce (6.11) do rovnice (6.9) se získá obecný vztah pro frekvenčně modulovaný signál v časové oblasti.

$$u_{FM}(t) = U_n \cos \left[2\pi f_n t + 2\pi k_{FM} \int_0^t m(t) dt \right]. \quad (6.12)$$

Pro další výklad je nutné si nadefinovat parametr *frekvenční zdvih* Δf . Frekvenční zdvih odpovídá maximální odchylce okamžitého kmitočtu modulovaného signálu od základního kmitočtu nosné vlny f_n při dané amplitudě modulačního signálu U_m . Δf je přímo úměrná této amplitudě, avšak nezávisí na kmitočtu modulační frekvence f_m .

Frekvenční zdvih lze zapsat vztahem

$$\Delta f = k_{FM} U_m. \quad (6.13)$$

Pro posuzování šířky spektra modulovaného signálu je potřeba ještě další parametr a to *index frekvenční modulace* β , což je poměr frekvenčního zdvihu ku modulační frekvenci. Je to fázová deviace (zdvih) signálu FM, tj. maximální odchylka okamžité fáze $\Omega_i(t)$ modulovaného nosného signálu od fáze nemodulované nosné vlny $2\pi f_n t$. Index frekvenční modulace β charakterizuje signál FM při sinusovém modulačním signálu.

Pro obecný modulační signál se definuje parametr *deviační poměr* D (Deviation Ratio). Ten je definován jako maximální frekvenční zdvih Δf_{\max} ku maximální frekvenci $f_{m \max}$ obsažené v modulačním signálu, tedy $D = \Delta f_{\max} / f_{m \max}$. Deviační poměr je pro daný systém FM konstantní. V praxi se používá $D \in (5 : 7)$. Pro FM rozhlas platí $D = 5$.

Šířka pásma modulovaného signálu FM

Jak již bylo řečeno, při úhlových modulacích vznikají intermodulační kmitočty, které v modulačním signálu obsaženy nebyly. Proto se nedá přesně říci jaká je šířka pásma modulovaného signálu. Stanovení pásma může být založeno na různých kritériích. Může to být například šířka pásma, v němž jsou přenášeny postranní složky s amplitudou větší než 1% amplitudy nosné vlny nebo např. již zmíněná šířka pásma B_3 .

Pro modulaci jedním harmonickým kmitočtem f_m a deviací Δf se v praxi šířka pásma určuje pomocí poloempirického *Carsonova vzorce*

$$B_{FM} \approx 2(f_m + \Delta f) = 2f_m(1 + \beta). \quad (6.14)$$

V případě obecného modulačního signálu je nutné do Carsonova vzorce dosadit nejnepríznivější hodnoty, tj. maximální frekvenci obsaženou ve spektru modulačního signálu $f_{m \max}$ a také maximální (špičkovou) deviaci Δf_{\max} odpovídající maximální amplitudě modulačního signálu. Výsledná šířka pásma frekvenční modulace je popsána vztahem

$$B_{FM} \approx 2(f_{m \max} + \Delta f_{\max}). \quad (6.15)$$

6.1.3 Fázová modulace

Fázová modulace PM (Phase Modulation) je varianta *úhlové modulace* u níž se okamžitá fáze $\Omega_i(t)$ modulovaného signálu rovná součtu fázového úhlu $2\pi f_n t$ nemodulované nosné vlny a časově proměnné složky $\varphi(t)$, která je přímo úměrná modulačnímu napětí $m(t)$, tedy

$$\Omega_i(t) = 2\pi f_n t + \varphi(t) = 2\pi f_n t + k_{PM} m(t), \quad (6.16)$$

kde k_{PM} je *fázová citlivost modulátoru PM* vyjádřená v jednotkách [rad/V]. Fázově modulovaný signál je dán vztahem

$$u_{PM}(t) = U_n \cos[2\pi f_n t + k_{PM} m(t)]. \quad (6.17)$$

Šířka pásma modulovaného signálu PM

Jelikož modulované signály FM a PM jsou podobné, jsou podobné i spektrální čáry těchto signálů. Rozdíl je jen v tom, že při změnách f_m a konstantním U_m se u modulace PM mění pouze odstup spektrálních čar, přičemž jejich amplituda zůstává zachována, kdežto u modulace FM se při změnách f_m mění odstup i amplituda spektrálních čar. Šířku pásma modulace PM lze vyjádřit vztahem

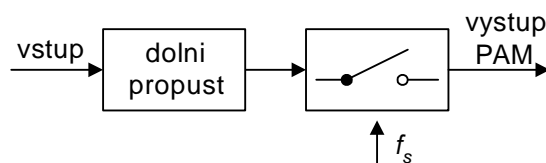
$$B_{PM} \approx 2f_{m\max} (1 + k_{PM}). \quad (6.18)$$

6.2 Diskrétní modulace s v základním pásmu

Diskrétní modulace v základním pásmu převádějí analogový modulační signál, na diskrétní signál (impulzový), který je rovněž situován do základního pásma. Ve skutečnosti se jedná o kódování, protože modulace je proces, při kterém se signál ze základního pásma převádí do vyššího frekvenčního pásma. V ustálené terminologii se však používá pojem modulace.

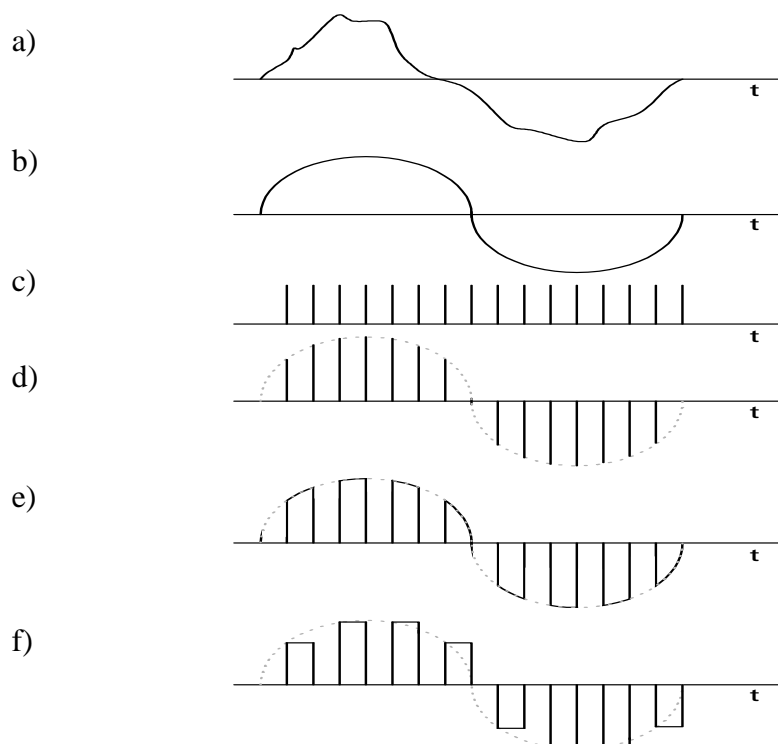
6.2.1 Pulzně amplitudová modulace PAM

Blokové schéma modulátoru PAM (Pulse Amplitude Modulation) je na obrázku 6.6 a průběhy signálů v průběhu modulace jsou na obrázku 6.7. Jako modulační signál považujeme libovolný signál (obr. 6.7a), který se upraví dolní propustí s šířkou pásma $B = f_{m\max}$, která potlačí případné vyšší nežádoucí složky (obr. 6.7b).



Obr. 6.6: Modulátor PAM

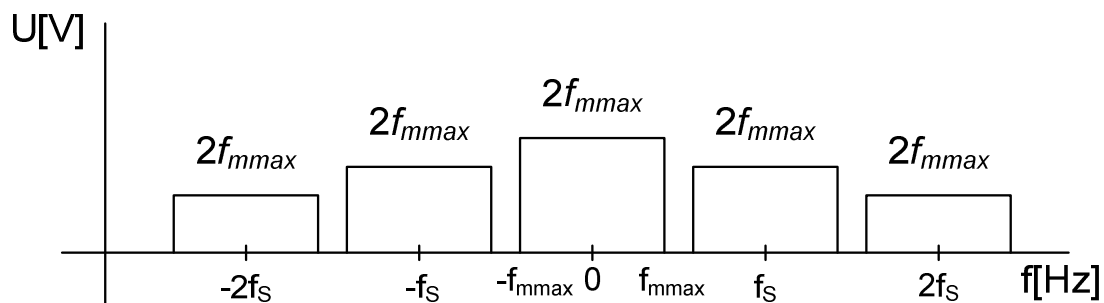
Tento signál se přivede na spínač (vzorkovač), který je spínán pravidelným sledem vzorkovacích impulzů s periodou $T_s = 1/f_s$ (obr. 6.7c). Pokud budou modulované pulzy prodlouženy na šířku pulzů T_i , bude modulovaný signál věrně kopírovat průběh modulačního signálu, jedná se o *věrné vzorkování* (obr. 6.7e). V praxi se používá také *uniformní vzorkování*, při němž se vytvářejí pravoúhlé vzorky modulačního signálu (obr. 6.7f). V obvodech s uniformním vzorkováním se využívají obvody *Hold-On*, které udržují na výstupu po dobu T_i hodnotu, kterou načetly na vstupu. Tohoto principu se využívá při dalším zpracování vzorkovaného signálu například v kodéru PCM, který má často omezenou pracovní rychlost a nedokázal by krátké vzorky signálu PAM vyhodnotit.



Obr. 6.7: Průběhy signálů PAM

Šířka pásma pulzně amplitudové modulace PAM

Na modulaci PAM je možné se dívat jako na násobení modulačního signálu $m(t)$ vzorkovací funkcí, resp. každou ze spektrálních složek této funkce. Proto, stejně jako u modulace AM-DSB-SC, každá z těchto složek vymizí a po jejích stranách se vytvoří páry postranních pásem. Při nejvyšším kmitočtu $f_{m\max}$ obsaženém v modulačním signálu a vzorkovací frekvenci f_s na vzorkovači zaujímá každý pár celkovou šířku pásma $2f_{m\max}$. Šířka pásma s věrným vzorkováním je uvedena na obrázku 6.8.



Obr. 6.8: Šířka pásma PAM

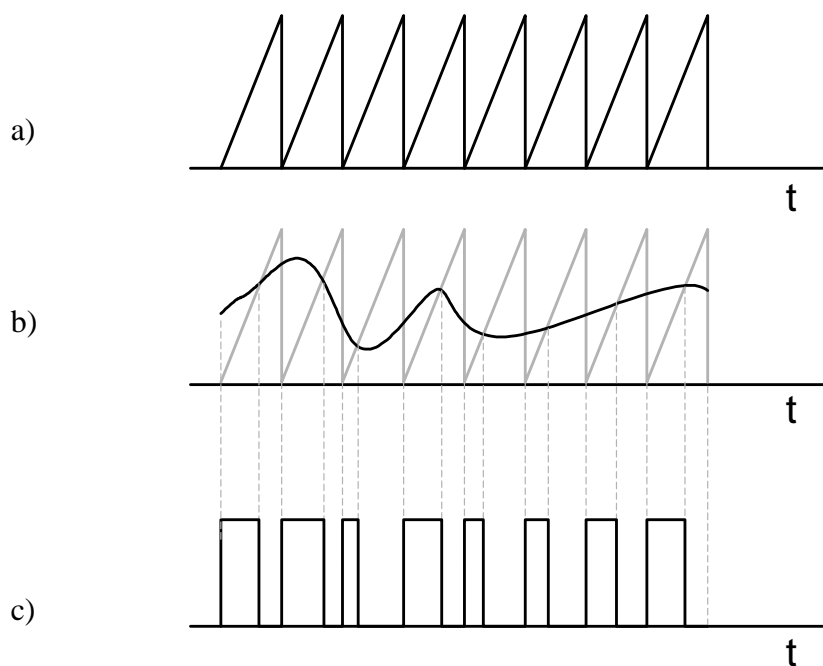
Aby nedocházelo ke zkreslení PAM modulace, tedy překrývání postranních pásem, musí být splněn Nyquistův (Shannon-Kotělníkův) vzorkovací teorém

$$f_s = \frac{1}{T_v} \geq 2f_{m \max} . \quad (6.19)$$

6.2.2 Pulzně šířková modulace PWM

Kromě amplitudy vzorkovacích impulzů může modulační signál ovlivňovat šířku impulzu (pulzně šířková modulace) nebo polohu impulzu (pulzně polohová modulace). Tyto změny lze chápat jako změny fáze impulzové nosné vlny, takže tyto modulace jsou analogií nelineárních úhlových modulací.

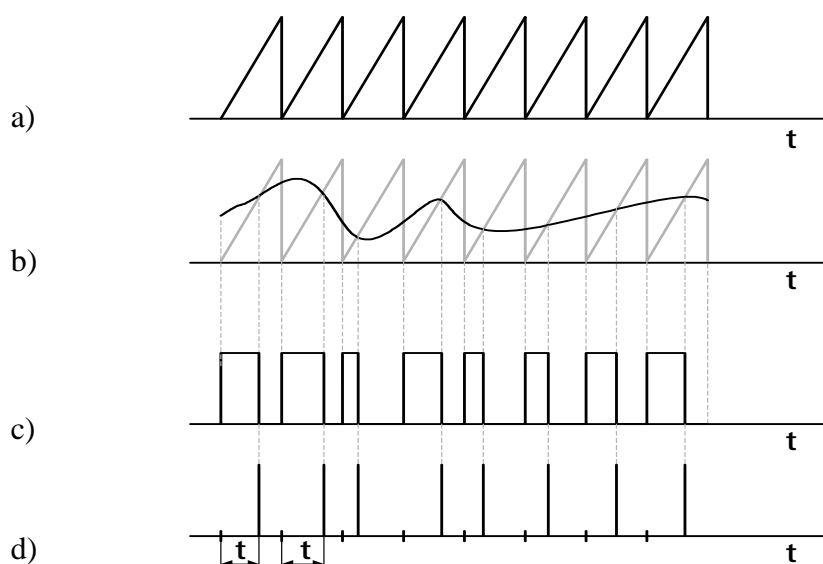
Modulovaný signál PWM (Pulse Width Modulation) je přenášen pomocí střídý obdélníkových impulzů. Jako referenční signál se používá pilovitý nebo trojúhelníkový průběh signálu s konstantní amplitudou a frekvencí. Referenční signál je porovnáván s amplitudou modulačního signálu. Pokud je okamžitá hodnota modulačního signálu menší než okamžitá hodnota referenčního signálu, má modulovaný signál kladnou amplitudu, v opačném případě má modulovaný signál nulovou hodnotu. Princip PWM je ukázán na obrázku 6.9.



Obr. 6.9: Průběhy signálů PWM

6.2.3 Pulzně polohová modulace PPM

U modulovaného signálu fázové modulace PPM (Pulse Position Modulation) se nemění ani amplituda impulzu jako u modulace PPM ani šířka impulzu jako u modulace PWM, ale poloha impulzu, tedy posun vzhledem k okamžiku vzorkování. Modulátor lze realizovat srovnáváním amplitudy modulačního signálu s amplitudou pilovitého průběhu, jehož začátek je shodný s okamžikem periodického vzorkování signálu. Průsečík těchto signálů tvoří posunutí od základní polohy pro každý odebíraný vzorek. Na obrázku 6.10a je pilovitý průběh, na obrázku 6.10b je porovnání pilovitého signálu s modulačním signálem. Na obrázku 6.10c je signál PWM a na obrázku 6.10d je signál PPM, kde t představuje již zmíněné posunutí od základní polohy.



Obr. 5.10: Průběhy signálů PPM

6.3 Digitální modulace s nosnými vlnami

Signály s diskrétními modulacemi je možné přenášet po metalických či optických přenosových cestách. Z důvodů optimalizace se tyto signály modulují na vysokofrekvenční složku pomocí digitálních modulací s nosnými vlnami. Tento způsob umožňuje přenášet více informačních signálů po jednom komunikačním kanálu.

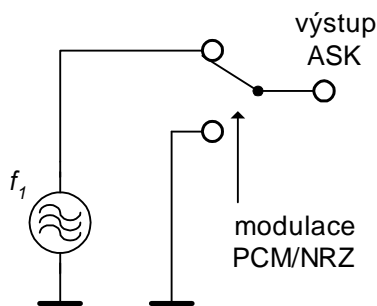
Diskrétní signály nelze přenášet rádiovým přenosem. Toto je další důvod, proč se používají digitální modulace. Diskrétní signál se namoduluje na vysokofrekvenční nosnou a takto vytvořený signál již lze přenášet rádiovým způsobem.

Digitální modulace s nosnými vlnami jsou dvojité modulace, neboť modulační signál je tvořen nějakou diskrétní modulací v základním pásmu. Nejčastěji se pro výhodné vlastnosti používá binární modulační signál PCM a DM a jejich varianty. Ty je pak možné namodulovat na sinusovou nosnou vlnu amplitudově, frekvenčně nebo fázově, popř. kombinací těchto uvedených způsobů.

Digitální modulace se rozdělují na dvoustavové, kdy se nosný signál mění mezi dvěma diskrétními stavy, čtyřstavové, kdy se mění mezi čtyřmi stavy a vícestavové, kde signál nabývá 2^m stavů, kde $m = 1, 2, 3, \dots$. Signál se může měnit v amplitudě, frekvenci nebo fázi. Ovlivňování nosné vlny v rámci dvou diskrétních stavů se nazývá klíčování.

6.3.1 Modulace ASK

Modulace ASK (Amplitude Shift Keying) je nejjednodušší způsob digitálních modulací. Modulační binární signál se přivede přes filtr, který odstraní nežádoucí vysokofrekvenční složky na vstup modulátoru. Na výstupu modulátoru vysokofrekvenční nosný signál je přítomen nebo není, tzn. na výstupu je nulová napěťová úroveň, v závislosti na modulačním diskrétním signálu. Modulátor ASK je na obrázku 6.11.



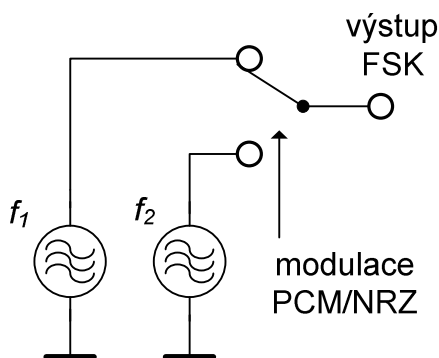
Obr.6.11: Modulátor ASK

Šířka pásma modulovaného signálu ASK

Pro modulační obdélníkový signál, jenž se opakuje se stejnou periodou, bude tvar amplitudového spektra modulovaného signálu ASK kopírovat amplitudové spektrum tohoto obdélníkového signálu, s tím rozdílem, že harmonické složky modulovaného signálu budou posunuty o velikost nosného kmitočtu a budou zrcadlově po obou stranách nosného kmitočtu. Pokud je kmitočet nosné v násobku opakovací periody obdélníkového impulzu, bude tvar spektra modulovaného signálu věrně kopírovat spektrum obdélníkového signálu. V opačném případě dochází ke vzniku intermodulačních složek v amplitudovém spektru. Šířka pásma je rovna šířce pásma modulačního signálu.

6.3.2 Modulace FSK

Dvoustavová modulace FSK (Frequency Shift Keying) využívá dvě nosné vlny s kmitočty f_1 a f_2 , které se přepínají na výstup modulátoru v rytmu modulačního signálu. Modulátor je nakreslen na obrázku 6.12, modulační signál je realizován PCM modulací. Modulační signál reprezentuje obdélníkový signál nabývající dvou úrovní s délkou trvání impulzu T_i . Pokud kmitočty f_1 a f_2 nejsou v žádném vztahu s bitovou frekvencí $f_b = 1/T_b$, vznikají při přechodech modulačního signálu fázové nespojitosti v modulovaném signálu.



Obr. 6.12: Modulátor FSK

Modulovaný signál je definován vztahem

$$s_{FSK}(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos[2\pi(f_n + \Delta f) \cdot t], \quad \text{pro } 0 \leq t \leq T_b \text{ (binární 1),} \quad (6.20a)$$

$$s_{FSK}(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos[2\pi(f_n - \Delta f) \cdot t], \quad \text{pro } 0 \leq t \leq T_b \text{ (binární 0),} \quad (6.20b)$$

kde $\sqrt{2E_b/T_b}$ je amplituda modulované vlny FSK, E_b je energie modulovaného signálu na jeden modulační bit, T_b je bitová perioda. Kmitočet f_1 je dán $f_n + \Delta f$ a kmitočet f_2 je dán $f_n - \Delta f$, kde Δf představuje kmitočtový zdvih, tj. odchylku od kmitočtu nosné vlny f_n .

Modulace FSK se v České republice používá pro přenos čísla volajícího u služby identifikace volajícího na analogových telefonech.

Šířka pásma modulovaného signálu FSK

Šířku pásma modulace FSK určuje Carsonův vzorec, který lze vyjádřit ve tvaru $B_{FSK} = 2(B_0 + \Delta f)$, kde B_0 představuje šířku pásma modulačního signálu v základním pásmu. U modulace FSK je při použití *Nyquistovy filtrace* pravoúhlých modulačních impulzů šířka modulačního binárního signálu $B_0 = f_b/2$. Šířka modulovaného FSK signálu je

$$B_{FSK} = 2\left(\frac{f_b}{2} + \Delta f\right) = f_b + 2\Delta f. \quad (6.21)$$

6.3.2 Modulace PSK

U dvoustavové modulace PSK (Phase Shift Keying), tj. modulace s klíčováním fázovým posuvem, ovlivňuje modulační binární signál fázi nosné vlny. Fáze může nabývat dvou diskretních stavů, například 0° a 180° a amplituda modulovaného signálu je konstantní. Příslušné signálové prvky lze vyjádřit vztahy

$$s_{PSK}(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_n t), \quad \text{pro } 0 \leq t \leq T_b \text{ (binární 1),} \quad (6.22a)$$

$$s_{PSK}(t) = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_n t), \quad \text{pro } 0 \leq t \leq T_b \text{ (binární 0),} \quad (6.22b)$$

kde $\sqrt{2E_b/T_b}$ je amplituda modulované vlny PSK, E_b je energie modulovaného signálu na jeden modulační bit, T_b je bitová perioda.

Šířka pásma modulovaného signálu PSK

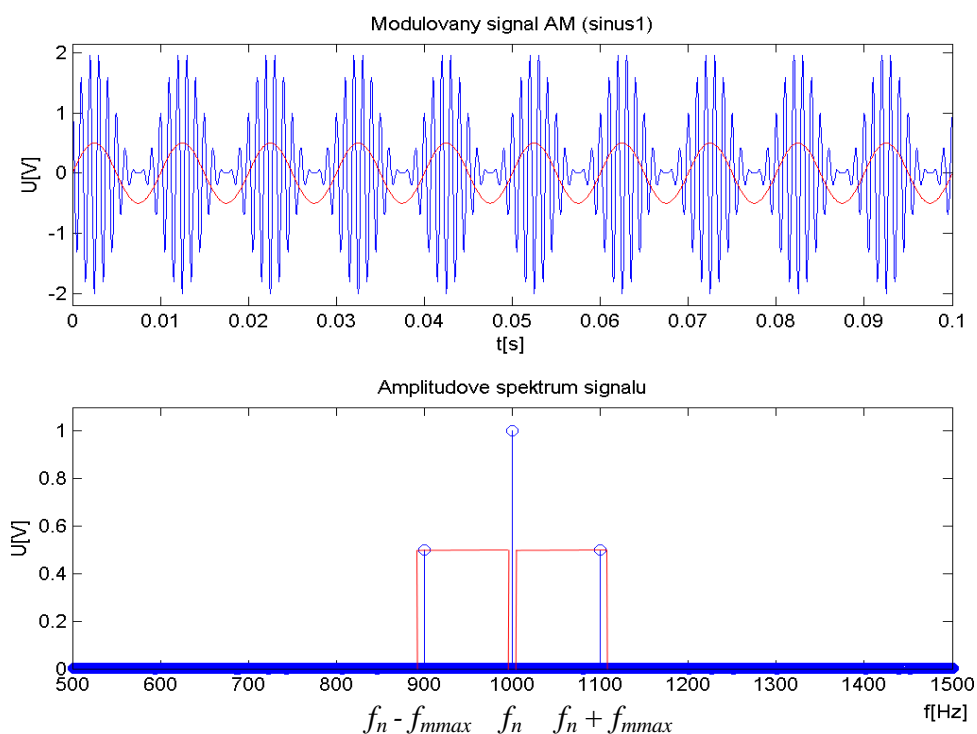
Na modulátor PSK lze pohlížet jako na součinnový modulátor DSB-SC. Na jeden vstup se přivádí analogová nemodulovaná nosná vlna a na druhý vstup datový polární modulační signál. Šířka pásma je určena bitovou rychlostí modulačního signálu. První harmonická při nejnejpříznivějším případě je dána $f_{m \max} = f_b/2$, takže takto určená šířka pásma PSK modulace je $B_{PSK} = f_b = 1/T_b$. Tato hodnota vyplývá z idealizovaného případu filtrace modulačního signálu dolní propustí s propustným pásmem $B_0 = 2f_b$.

7 Praktická část

V rámci praktické části jsem naimplementoval jednotlivé modulace, které jsou v příloze A na CD v podobě m-funkcí. Dále programy pro generování modulačních signálů, které jsou v příloze B na CD a program pro výpočet a zobrazení amplitudového spektra zadaného signálu, který je v příloze C na CD.

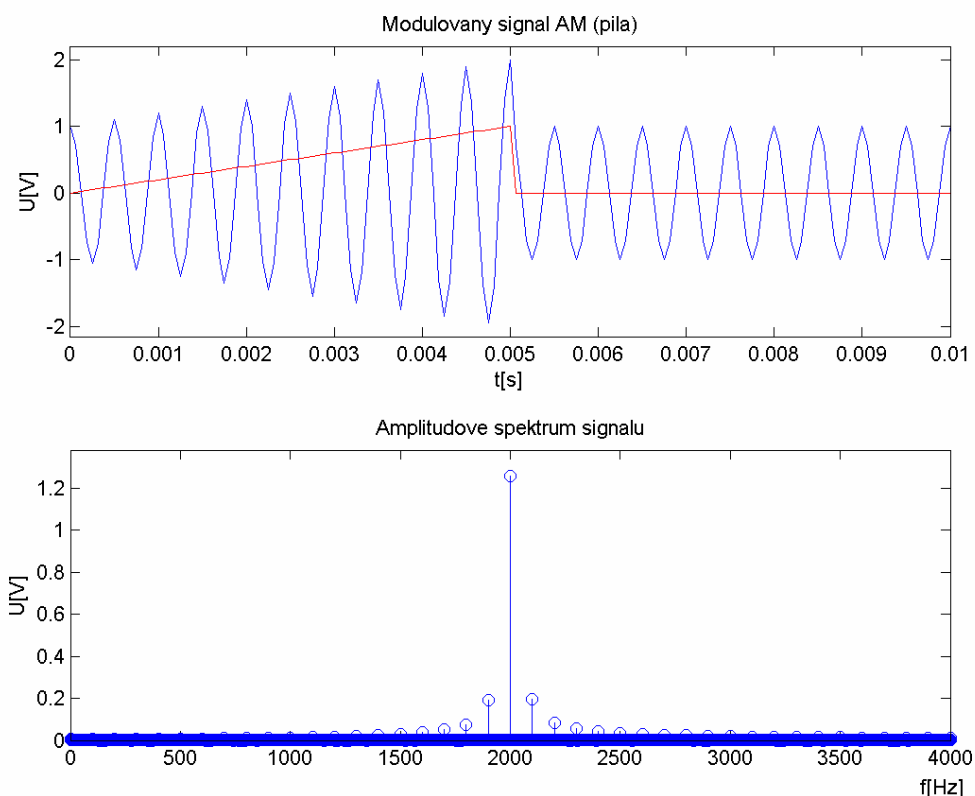
7.1 Amplitudová modulace AM

Na obrázku 7.1. je modulovaný signál AM, jehož šířka pásma je podle teoretických předpokladů dána od kmitočtu $f_n - f_{m\max}$ do $f_n + f_{m\max}$, tedy $B = 2f_{m\max}$. Na spodním obrázku je tato šířka vyznačena červenou čarou. Modulační harmonický signál o kmitočtu $f_m = 100\text{Hz}$ je zobrazen modrou barvou, reprezentovaný složkami $f_n - f_{m\max}$ (900Hz) a $f_n + f_{m\max}$ (1100Hz). Nosný kmitočet byl zvolen $f_n = 1000\text{Hz}$. Amplituda složek v postranních pásmech je dána $mU_c/2$. V simulaci byl použit činitel $m=1$ a $U_c=1\text{V}$, amplituda složek je tedy 0,5V. Šířka pásma AM modulace je $B = 2f_m = 2 \cdot 100 = 200\text{Hz}$.



Obr. 7.1: Šířka pásma modulovaného signálu AM (sinus1)

Při modulování pilovitým signálem s parametry $T_i = 0,005\text{ s}$ a opakovací periodou $T_0 = 0,01\text{ s}$, spektrum modulovaného signálu vypadá jako spektrum pilovitého signálu posunutého o kmitočet nosné. Spektrum takového modulovaného signálu je na obrázku 7.2. Je patrné, že spektrum obsahuje nekonečné množství složek, které jsou dané posloupností kmitočtů $kf_0 = k/T_0$, kde $T_0 = 0,01\text{ s}$, $f_0 = 100\text{ Hz}$ a $k = 1, 2, 3, \dots$. Z tohoto důvodu je potřeba modulační pilovitý signál filtrovat dolní propustí, která odstraní nežádoucí vysokofrekvenční složky způsobené skokovými změnami obsaženými v pilovitém signálu. Pro určení šířky pásma signálu je potřeba aplikovat kritérium, kdy šířka pásma je určena např. poklesem spektrální hustoty modulovaného signálu o 3dB.

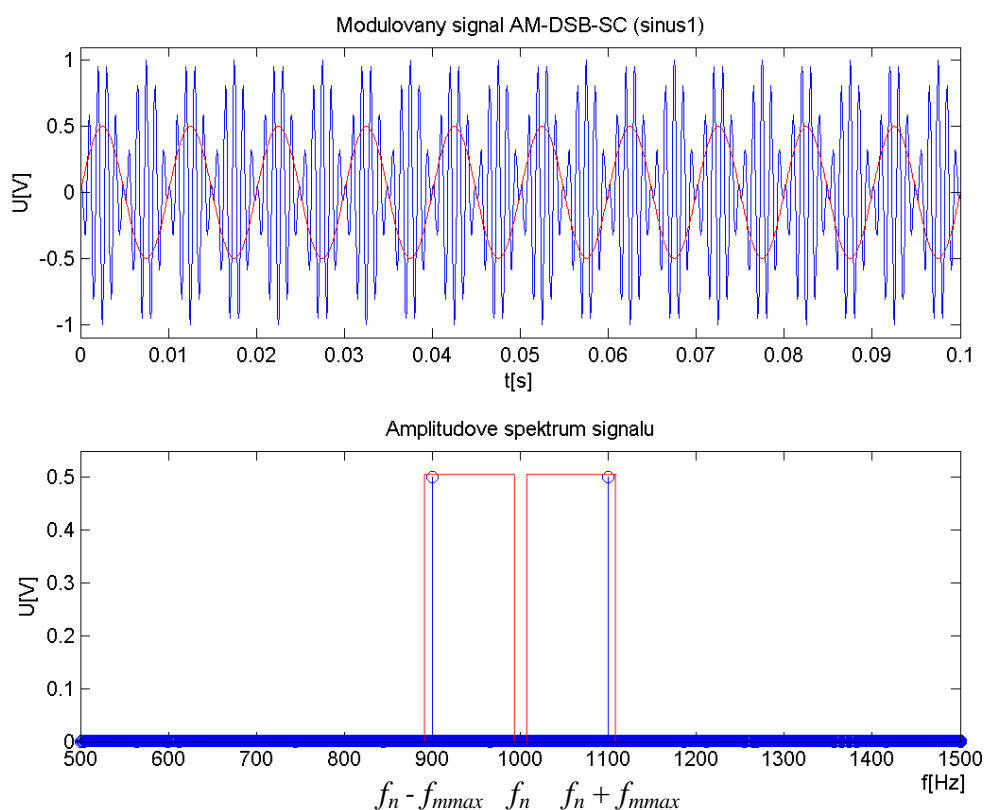


Obr. 7.2: Šířka pásma modulovaného signálu AM (pila)

7.2 Amplitudová modulace AM-DSB-SC

Při modulaci harmonického signálu touto modulací vzniká stejně široká šířka pásma modulovaného signálu jako u modulace AM s tím rozdílem, že v modulovaném signálu není zastoupena vysokofrekvenční nosná, která zaujímá podstatnou část vysílacího výkonu. Při AM-DSB-SC lze dosáhnout až 3 krát většího výkonu v postranních pásmech. Pro stejné hodnoty modulačního signálu a nosné vlny jako u modulace AM je spektrum modulace AM-DSB-SC zobrazeno na obrázku 7.3.

Šířka pásma AM-DSB-SC je $B = 2f_m = 2 * 100 = 200\text{Hz}$.

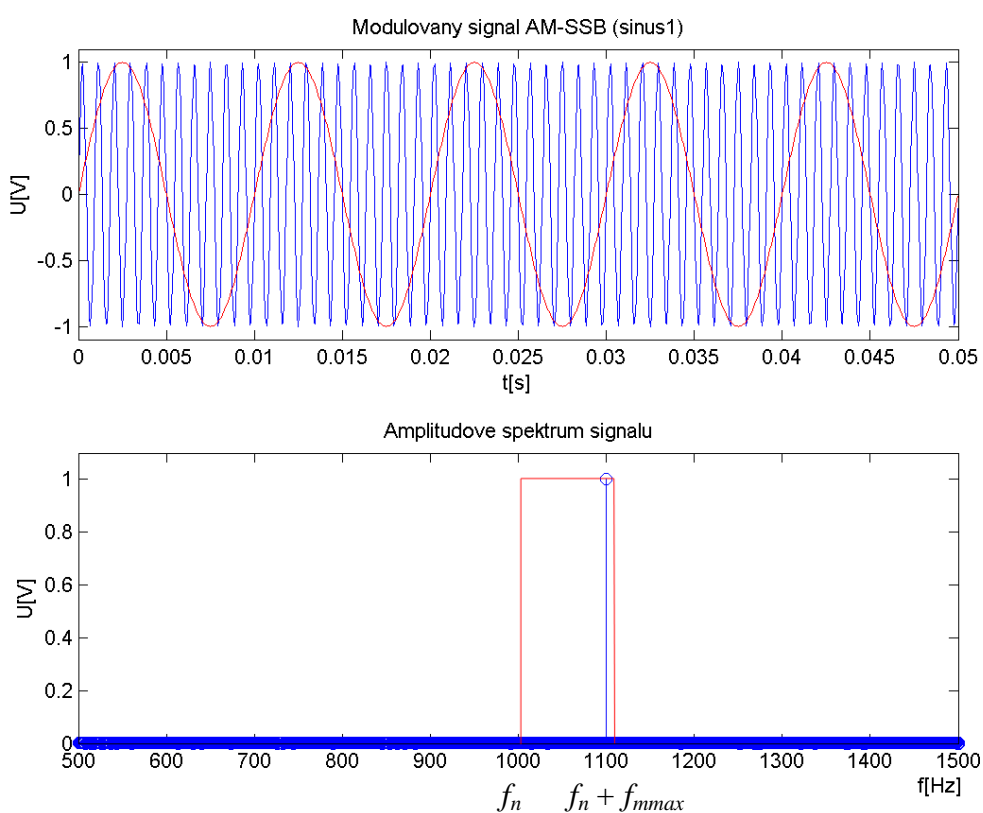


Obr. 7.3: Šířka pásma modulovaného signálu AM-DSB-SC (sinus1)

7.3 Amplitudová modulace AM-SSB

Šířka pásma této modulace je dána maximálním kmitočtem v modulačním signálu $B = f_{m \max}$. Při modulaci harmonického signálu je šířka pásma od kmitočtu nosné vlny f_n do kmitočtu $f_n + f_{m \max}$, přitom kmitočet nosné není v modulovaném signálu zastoupen. Na obrázku 7.4 je teoretický předpoklad spektra zobrazen červenou barvou, složky v signálu jsou zobrazeny modrou barvou.

Šířka pásma AM-DSB modulace je $B = f_m = 100 \text{ Hz}$.



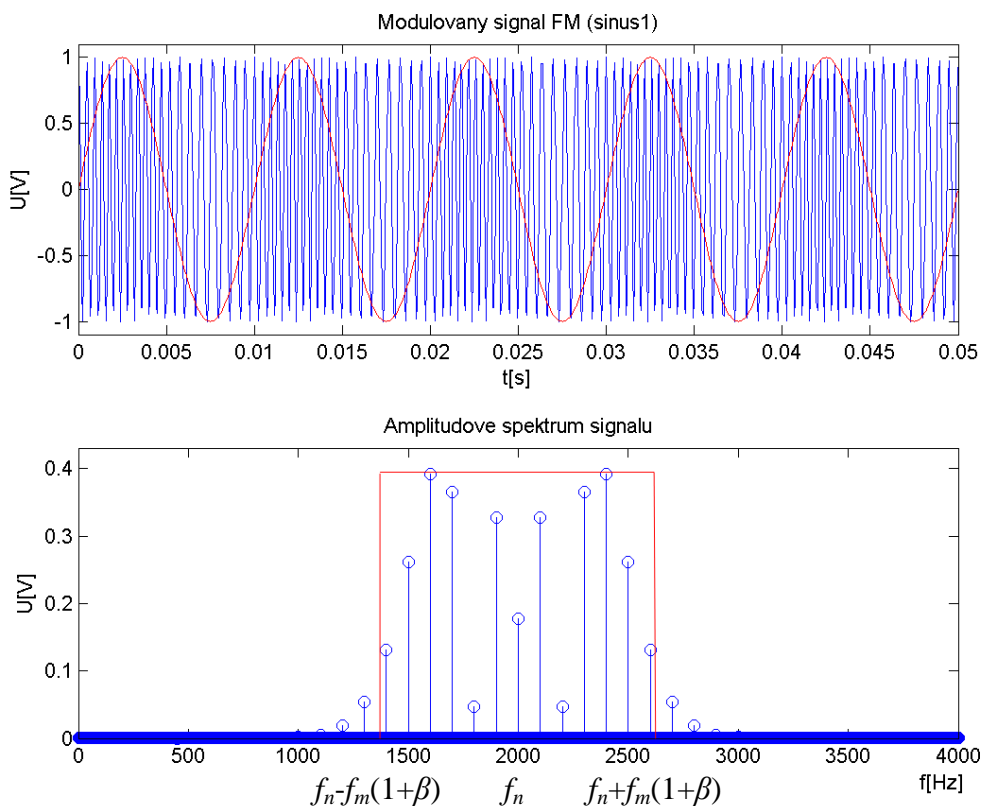
Obr. 7.4: Šířka pásma modulovaného signálu AM-SSB (sinus1)

7.4 Frekvenční modulace FM

Při modulaci harmonickým signálem o frekvenci $f_m = 100\text{Hz}$ je teoretická šířka pásma dána vzorečkem $B = 2f_m(1 + \beta)$, kde f_m je modulační kmitočet a β je index frekvenční modulace $\beta = \Delta f / f_m$. Δf je frekvenční zdvih. Šířka pásma modulovaného signálu pro zvolenou hodnotu frekvenčního zdvihu $\Delta f = 500$ je

$$B = 2f_m \left(1 + \frac{\Delta f}{f_m}\right) = 2 * 100 * \left(1 + \frac{500}{100}\right) = 1200\text{Hz}.$$

Na obrázku 7.5 je vypočtená šířka pásma modulovaného signálu červenou barvou, modrou barvou jsou jednotlivé složky modulovaného signálu..



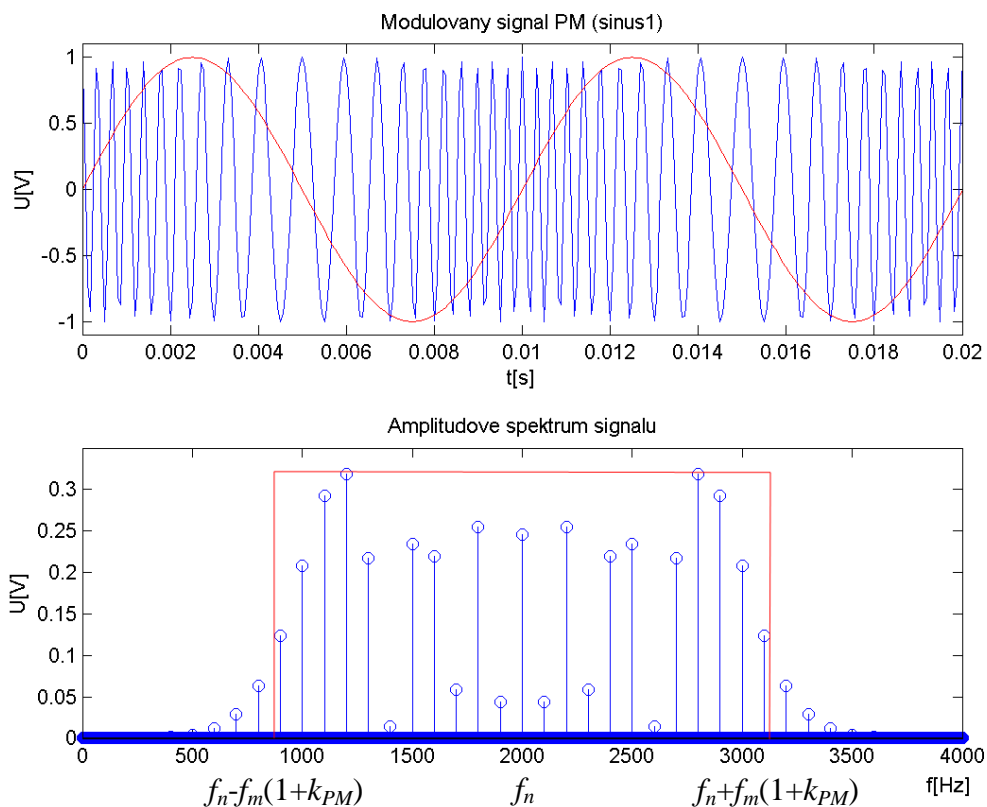
Obr.7.5: Šířka pásma modulovaného signálu FM (sinus)

7.5 Fázová modulace PM

Jak již bylo zmíněno v kapitole 5.1.3, je tato modulace podobná modulaci FM. Šířka pásma pro harmonický modulační signál je dána

$$B = 2f_m(1 + k_{PM}) = 2 * 100 * (1 + 10) = 2200 \text{ Hz}.$$

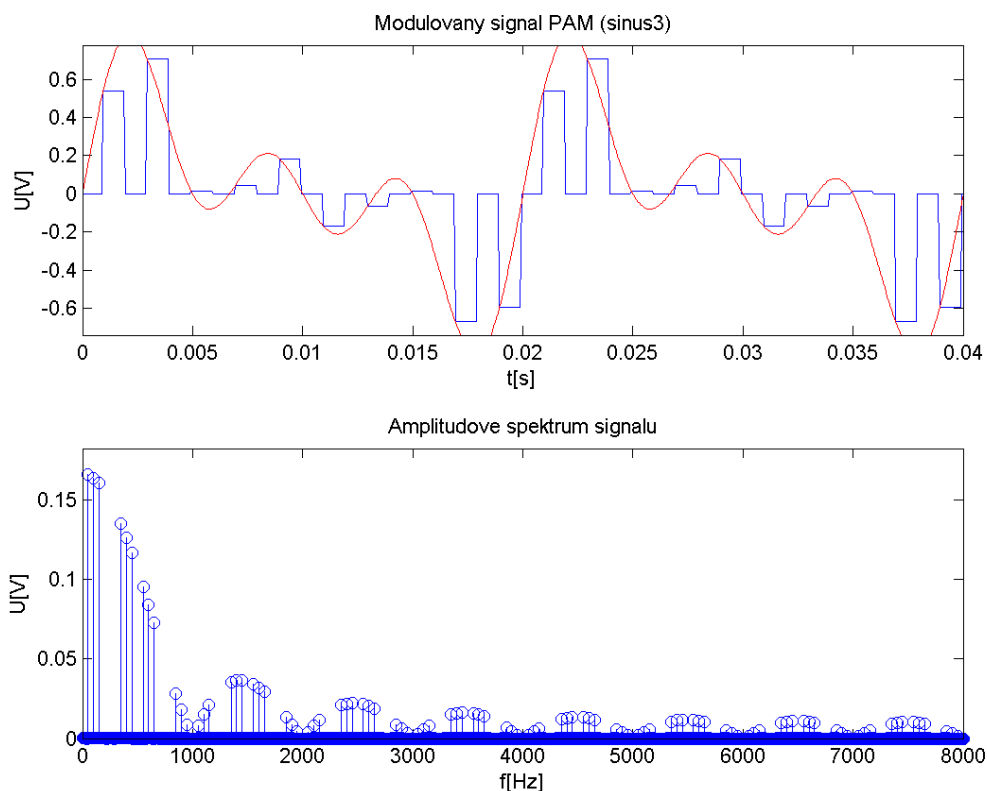
Na obrázku 7.6 je zobrazena vypočtená šířka pásma červenou barvou a složky modulovaného signálu barvou modrou.



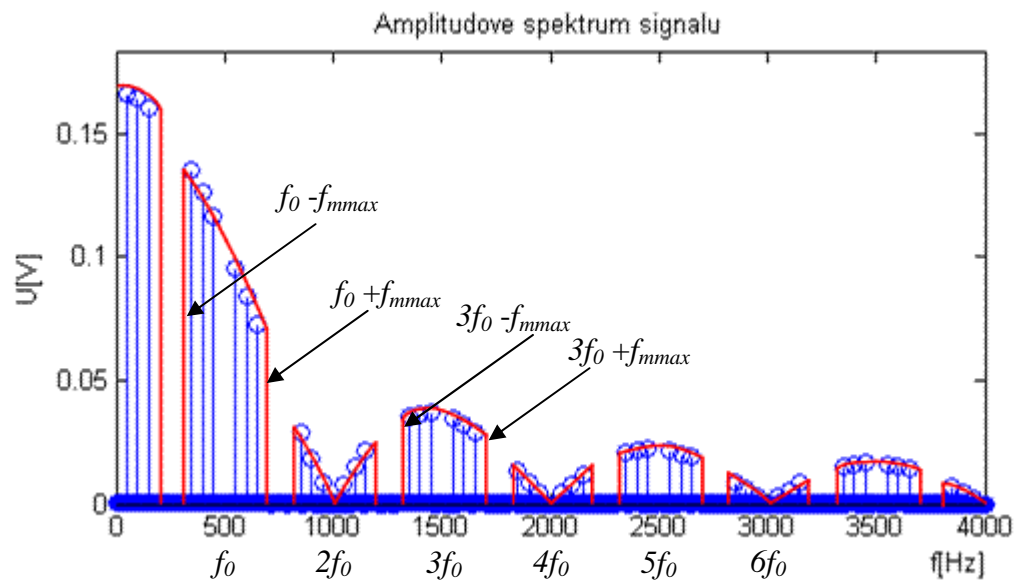
Obr.7.6: Šířka pásma modulovaného signálu PM (sinus)

7.6 Pulzně amplitudová modulace PAM

V kapitole 6.2.1 je popis šířky pásma PAM modulace pro věrné vzorkování. Pro názornost bude zde rozebrána šířka pásma PAM modulace pro uniformní vzorkování. Modulační signál je reprezentován třemi harmonickými složkami o kmitočtech $f_1 = 50\text{Hz}$, $f_2 = 100\text{Hz}$ a $f_3 = 150\text{Hz}$. Modulační signál je přiváděn na spínací funkci, která má periodu $T_s = 0,001\text{s}$ a je složena z pulzů o šířce $T_i = 0,001\text{s}$ a opakovací periodě $T_0 = 0,002\text{s}$. Jednotlivé impulzy modulovaného signálu nekopírují tvar modulačního signálu (věrné vzorkování), ale drží si po dobu T_i amplitudu modulačního signálu na začátku pulzu (uniformní vzorkování). Na obrázku 7.7 je zobrazen modulovaný signál a jeho spektrum.



Obr.7.7: Šířka pásma modulovaného signálu PAM (sinus3)

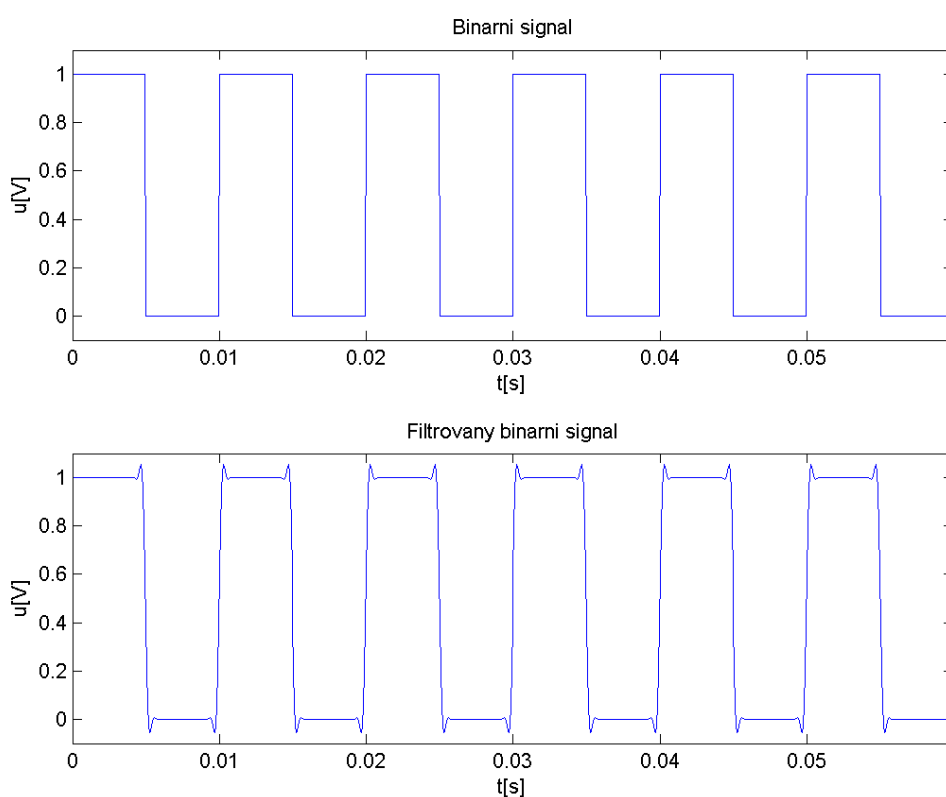


Obr.7.8: Šířka pásma modulovaného signálu PAM detail (sinus3)

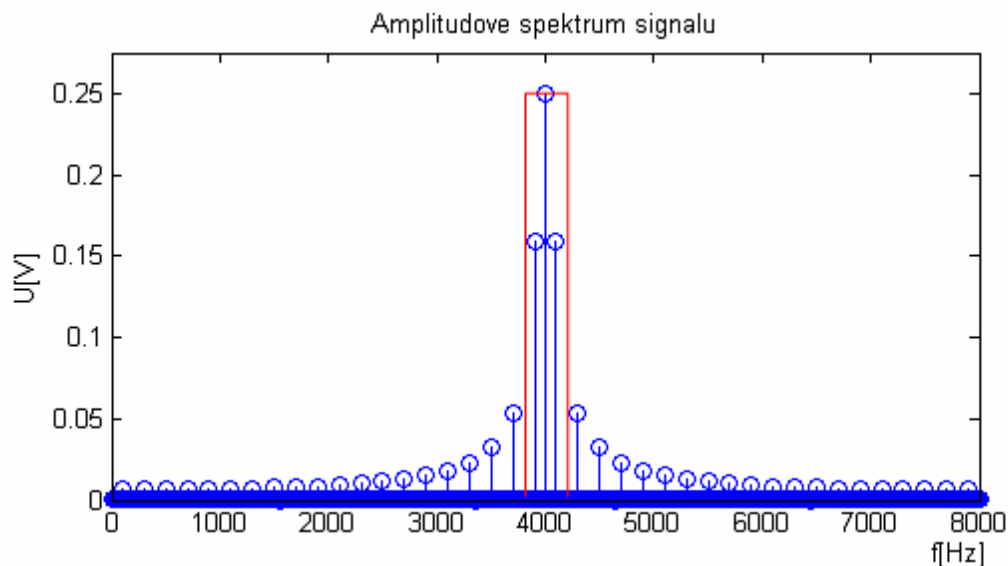
Pro detailnější rozbor šířky pásma poslouží obrázek 7.8. Modulovaný signál PAM modulace je tvořen obdélníkovými pulzy, proto je spektrum podobné spektru obdélníkového signálu. Spektrum modulovaného signálu PAM je tvořeno nekonečným počtem postranních pásem s šířkou $2f_{m\max}$ souměrně položených kolem násobků kmitočtů $k/T_0 = 500\text{Hz}$ pro $k = 0, 1, 2, \dots$. Amplituda těchto pásem kopíruje tvar amplitudového spektra obdélníkového signálu s šířkou impulzu $T_i = 0,001\text{s}$.

7.7 Modulace s amplitudovým klíčováním ASK

Modulační binární signál obsahuje nekonečné množství nežádoucích vysokofrekvenčních složek, které se oříznou ve filtru dolní propusti s maximální, přenášeným kmitočtem 4kHz . U digitálních modulací se používá jako modulační signál právě tento filtrovaný binární signál. Na obrázku 7.9 je zobrazeno, jak se tvar signálu zkreslí po průchodu tímto filtrem. Amplitudové spektrum modulovaného filtrovaného binárního signálu je znázorněno na obrázku 7.10. Pro určení šířky pásma je potřeba aplikovat například kritérium šířky pásma např. B3.



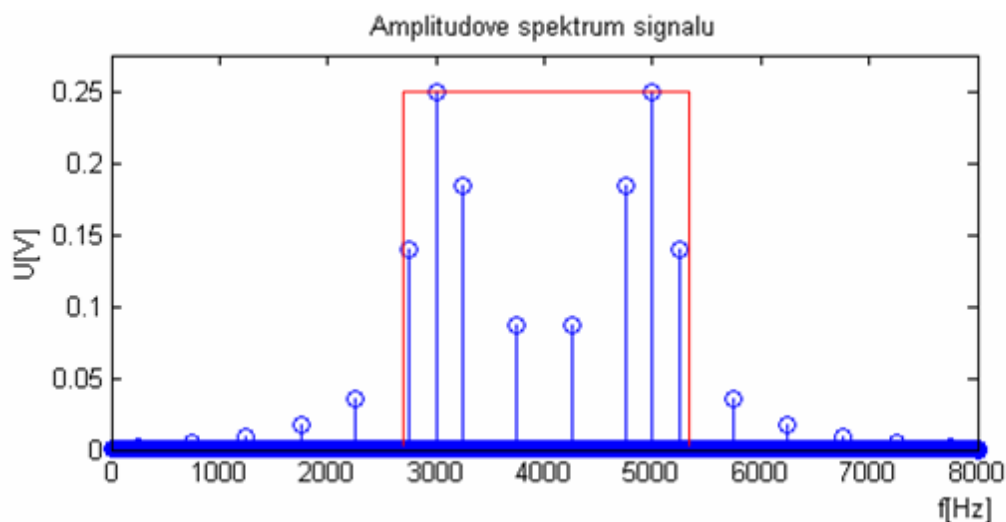
Obr.7.9: Binární signál a filtrovaný binární signál



Obr. 7.10: Šířka pásma modulovaného signálu ASK

7.8 Modulace s frekvenčním klíčováním FSK

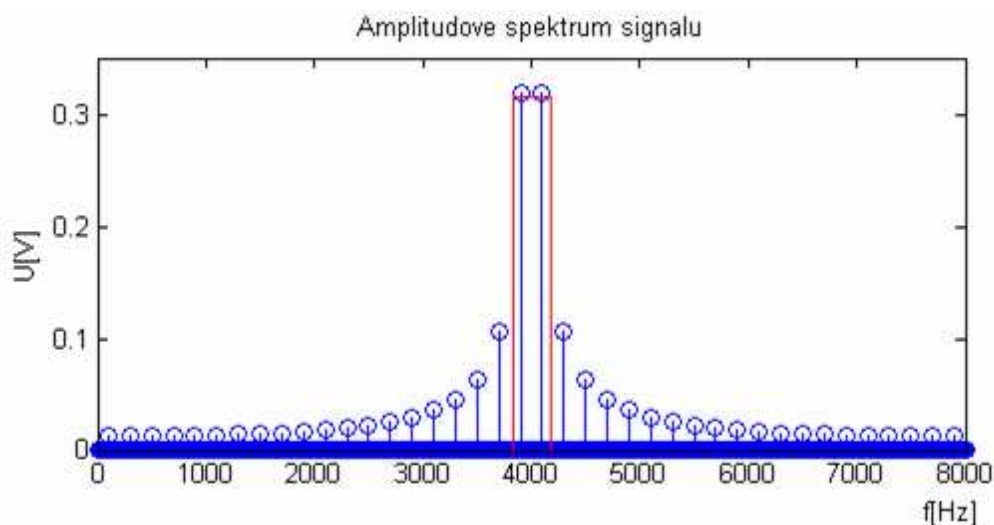
Mějme binární signál s šířkou pulzu $T_i = 0,002s$ a bitovou rychlostí $f_b = 1/T_i = 500Hz$. Ten přivedeme na vstup filtru, který odstraní vysokofrekvenční složky větší než $4kHz$ a následně na modulátor s nosným kmitočtem $f_n = 4000kHz$ a kmitočtovým zdvihem $\Delta f = 1000Hz$. Šířka pásma modulovaného signálu bude dána výpočtem podle Carsonova vzorce $B = f_b + 2\Delta f = 500 + 2 \cdot 1000 = 2500Hz$. Na obrázku 7.11 je zobrazeno amplitudové spektrum modulovaného signálu a teoretický předpoklad šířky pásma.



Obr. 7.11: Šířka pásma modulovaného signálu FSK

7.9 Modulace s fázovým klíčováním PSK

Modulační signál je tvořen binárním signálem s šířkou impulzu $T_i = 0,005s$ a bitovou rychlostí $f_b = 1/T_i = 200Hz$. Tento signál je přiveden na vstup filtru s maximálním přenášeným kmitočtem $4kHz$ a z filtru je přiveden na vstup modulátoru s kmitočtem nosné $f_n = 4000Hz$. Šířka pásma je dána vzorcem $B = 2f_b = 2 * 200 = 400Hz$. Amplitudové spektrum modulovaného signálu a předpoklad šířky pásma je zobrazen na obrázku 7.12.



Obr.7.12: Šířka pásma modulovaného signálu PSK

8 Závěr

V práci jsem shrnul teoretické požadavky na spektrum signálu, modulovaného různými typy analogových a digitálních modulací a simulací ověřil platnost teoretických předpokladů.

U AM modulace harmonickým signálem šířka pásma odpovídá teoretickým předpokladům. Při modulaci pilovitým signálem, který ve svém amplitudovém spektru obsahuje nekonečné množství vyšších kmitočtů způsobených ostrou hranou signálu, je šířka pásma větší než podle teoretických předpokladů. U takových modulačních signálů je potřeba signál nejprve upravit frekvenčním filtrem dolní propusti, který ořízne nežádoucí vysoké kmitočty. Tímto však dojde ke zkreslení signálu, ale zajistí se šířka pásma podle teoretických předpokladů. Napsané platí o všech třech typech amplitudových modulací – AM, AM-DSB-SC, AM-SSB.

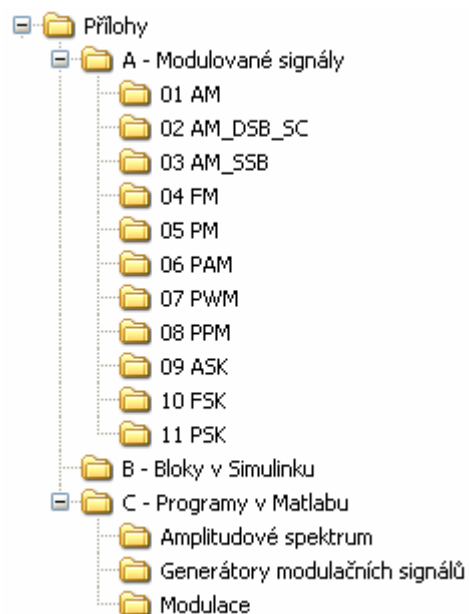
Frekvenční a fázová modulace spadá do kategorie úhlových modulací což vede ke vzniku intermodulačních kmitočtů. Šířka pásma striktně neodpovídá teoretickým předpokladům, pro posouzení šířky pásma je nutno užít kritéria, například poklesu úrovně spektrální hustoty modulovaného signálu o 3dB.

U PAM modulace vznikají modulované signály s nekonečně velkou šířkou pásma. Toto je způsobené modulovaným signálem, jenž má tvar obdélníkových impulzů. Šířka pásma je dána teoretickými požadavky podle obrázku 6.8. Výsledky simulací modulace PAM odpovídají této teorii. Modulace PPM je pro přenos modulovaného signálu přenosovým kanálem velmi náročná, protože modulovaný signál má nekonečně široké spektrum, které nelze určit matematickým modelem, jak se můžeme přesvědčit na obrázcích v příloze A na CD.

Šířka pásma digitálních modulací není jednoznačně dána, proto se využívá posouzení šířky pásma podle poklesu úrovně spektrální hustoty modulovaného signálu o 3dB.

Seznam příloh na CD

Přílohy na CD jsou umístěny v adresáři *Přílohy* a jsou uloženy podle struktury zobrazené viz níže.



Literatura

- [1] ŽALUD, Václav. *Moderní radioelektronika*. 1. vyd. Praha : BEN, 2000. 655 s. ISBN 80-86056-47-3.
- [2] DOBEŠ, Jan, ŽALUD, Václav. *Moderní radiotechnika*. 1. vyd. Praha : BEN, 2006. 767 s. ISBN 80-7300-132-2.
- [3] KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. 1. vyd. Brno : Computer Press, 2006. 214 s. ISBN 80-251-1301-9.
- [4] ZAPLATÍLEK, Karel, DOŇAR, Bohuslav. *MATLAB : Začínáme se signály*. 1. vyd. Praha : BEN, 2006. 271 s. ISBN 80-7300-200-0.
- [5] SÝKORA, Jan. *Digitální rádiová komunikace II*. 1. vyd. Praha : ČVUT, 1998. 350 s. ISBN 80-01-01374-X.
- [6] SÝKORA, Jan. *Teorie digitální komunikace*. 1. vyd. Praha : ČVUT, 2003. 329 s. ISBN 80-01-02478-4.
- [7] KOZUMPLÍK, Jiří, KOLÁŘ, Radim, JAN, Jiří. *Číslicové zpracování signálů v prostředí MATLAB*. 1. vyd. Brno : VUT, 2001. 73 s. ISBN 80-214-1964-4.